1979年日本全国各大学

数学入学试题汇解

浙江科学技术出版社

1979年日本全国各大学

数学入学试题汇解

张明樑　王兴华编译

浙 江 科 学 技 术 出 版 社

封面设计　盛元富

1979年日本全国各大学
数学入学试题汇解
张明梁　王兴华编译
*
浙江科学技术出版社出版
浙江新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本：787×1092　1/32　印张4.625　字数112,000
1980年4月第　一　版
1980年4月第一次印刷

统一书号：13221·2
定　　价：0.45 元
（杭州大学印刷厂排版）

出版说明

本书根据日本圣文社编的《一九七九年度全国大学数学入试问题详解》及其续编，选译其中有关初等数学的试题，按其内容分类汇编而成。编译时，在不影响题意的前提下，对题文作了适当更动，使之前后比较连贯，自成系统。在题解上，更作了较大的删改，力求精炼扼要，突出主干，别具一格。

本书可供中学数学教师、高中学生以及数学爱好者参考。

目　录

试题汇编

一、数与式……………………………………………………（1）

有理数和无理数（1—4）　整式的计算（5—16）　整式的整除问题（17—26）　分式与无理式的计算（27—34）　整数问题（35—42）

二、方程式……………………………………………………（6）

二次方程（43—71）　复数的计算（72—77）　高次方程（78—85）　联立方程（86—90）　恒等式（91—97）　整数与方程（98—102）

三、不等式……………………………………………………（14）

解不等式（103—105）　不等式的证明（106—110）　不等式研究（111—117）

四、函数与图象………………………………………………（17）

二次函数（118—122）　分式及无理函数（123—126）　函数的最大值与最小值（127—136）　杂题（137—145）

五、指数函数与对数函数……………………………………（22）

指数函数与对数函数（146—153）　指数对数方程（154—161）　指数对数不等式（162—166）　最大值最小值问题（167—169）

六、三角函数…………………………………………………（25）

三角函数（170—187）　方程以及不等式（188—194）　最大值最小值问题（195—197）　图形与三角函数（198—206）　三角函数的加法定理（207

—222）

七、图形与方程……………………………………………（32）

点与直线（223—335）　抛物线与直线（236—241）
圆（242—248）　椭圆（249—250）　轨迹问题（251
—254）　不等式与平面区域（255—259）

八、数列……………………………………………………（39）

等差数列与等比数列（260—268）　其它各种数列
（269—276）　数列的应用（277—282）　数学归纳
法（283—289）　二项式定理（290—294）

九、其它（几何、集合等等）……………………………（46）

几何（295—299）　集合等等（300—307）

解　答　（49）

附　录　（140）

试 题 汇 编

一、数 与 式

有理数和无理数

1. 设 a 与 b 为正有理数，满足

$(\sqrt{3}a+\sqrt{2})a+(\sqrt{3}b-\sqrt{2})b-\sqrt{2}-25\sqrt{3}=0$.

求 a 与 b 之值. 〔215〕*)

2. 设 a，b 为有理数,已知 $A=\dfrac{a+\sqrt{2}}{b+\sqrt{2}}$, $B=(a+\sqrt{2})(b+\sqrt{2})$

满足 $B=\dfrac{8A}{(1+A)^2}$ 的关系，试根据"$\sqrt{2}$ 为无理数"，推导 a 与 b 的关系. 〔147〕

3. 分别就 （1） m 为正整数；（2） m 为负整数 这两种情形，求满足

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^m+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^m=4$$

的 m 之值. 〔152〕

4. 证明 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数. 〔121〕

整 式 的 计 算

5. 因式分解 $x^2y+xy^2+x^2+2xy+y^2+x+y$. 〔214〕

6. 因式分解 $-2x^2+xy-5x+y^2-y-2$. 〔165〕

---

*) 每题后面方括号内的数字依照附录的排列顺序对应着一个大学，表示本题是从该大学的入学试卷中选来的.

7. 因式分解 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. 〔173〕

8. 在实系数的范围内分解 a^6+b^6 的因式. 〔157〕

9. 证明：不可能选择这样的实数 a, b, c, d, 使 x 的二次式 $3x^2+2x+1$ 因式分解为 $(ax+b)(cx+d)$. 〔168〕

10. 求 x^2+2x+1 和 x^2+3x+2 的最大公因式与最小公倍式. 〔225〕

11. 为使 $2x^3+3x^2-2x-3$ 与 $x^3-2x^2+(1-a)x+a$ 这两个整式有二次最大公因式，试求 a 的值. 〔179〕

12. 为使 x^3+4x^2+x-6 与 $2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$ 这两个整式有二次最大公因式，试求 a 的值. 〔171〕

13. 设 $x^2-x+1=0$, 求 $1+x^3+\dfrac{1}{1-x^3}$ 的值. 〔197〕

14. 设 $x+y=1$, $x^2+y^2=2$, 求 x^7+y^7 的值. 〔90〕

15. 设 $P=x^3+4x^2+x-6$, $Q=x^3+2x^2-5x-6$, 求 P 和 Q 的最大公因式 G，并将 G 用 P 和 Q 加以表示. 〔75〕

16. 设正整数 $n\geqslant 3$,

$$P_n=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1,$$
$$Q_n=x^{3n-1}+x^{3n-2}+\cdots+x^{2n+2}+x^{2n+1}+1.$$

(1) 化简 $(x-1)P_n$.

(2) 证明 Q_n 能被 P_n 整除，并求商式.

(3) 若 $x^n-1=0$, 试求 P_{3n} 之值. 〔149〕

整式的整除问题

17. 求 x^4 被 $x^2+\sqrt{2}x+1$ 除的商和余式. 〔221〕

18. 若 x^3+ax^2+6x-4 能被 $x+2$ 整除，求 a 的值. 〔225〕

19. 若 $2x^3+ax^2+bx+4$ 能被 $2x^2-5x+2$ 整除，求 a 与 b 的值. 〔83〕

20. 若 x^3-px^2+3x+q 能被 $(x+1)^2$ 整除，求 p 和 q 之值. 〔79〕

21. 设整式 $f(x)$ 用 $x-2$ 除余 1，用 x 除余 -1. 试求 $f(x)$ 用 $x(x-2)$ 除的余式. 〔73〕

22. 设整式 $f(x)$ 用 $x-1$ 除余 3，用 $x-2$ 除余 4. 试求 $f(x)$ 用 x^2-3x+2 除的余式. 〔76〕

23. 设自然数 $n\geqslant 2$，实数 $a\neq -2$. 若 x^n 用 $x^2+ax-(a+1)$ 除余 a_nx+b_n，试求 a_n 与 b_n. 〔78〕

24. 设 a，b，c 为相异的三个数. 若整式 $f(x)$ 被 $x-a$，$x-b$，$x-c$ 除的余式分别是 a^2+b+c，$a+b^2+c$，$a+b+c^2$，试求 $f(x)$ 被 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除的余式. 〔154〕

25. 设 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+9x+7$，$g(x)=dx+e$，$h(x)=dx-e$，$g(1)=0$. 又设 $f(x)$ 被 $\{h(x)\}^2$ 除的商为 $a(x-2)^2$，余式为 $g(x)$. 试求其中的常数 a，b，c，d，e 的值. 〔207〕

26. 设有二次式 $g(x)=x^2-4x+a$，这里 a 是常数. 假如有唯一的三次项系数为 1 的三次整式 $f(x)$ 存在，它既是 $g(x)$ 的倍式，又是 $\{g(x)\}^2$ 的因式，试于此时求 a 和 $f(x)$. 〔206〕

分式与无理式的计算

27. 已知 $a:b:c=2:3:4$，求 $\dfrac{a-b-c}{a+b+c}$. 〔145〕

28. 计算或化简： 〔90，225，229〕

(1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$；　　(2) $\dfrac{a^2-ab}{a+b}\div\dfrac{a-b}{ab+b^2}$；

(3) $\dfrac{2x+3y}{x^2-x+1}-\dfrac{3x-2y}{x^2+x+1}$；　(4) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}$.

29. 对正整数 p，q 与 r，$q<r$，定义

$$S\left(p+\frac{q}{r}\right)=\begin{cases}p+1, & \text{当 } p \text{ 为偶数时；}\\ p, & \text{当 } p \text{ 为奇数时.}\end{cases}$$

试求 $S\left(5+\frac{1}{2}\right)-S\left(2+\frac{3}{4}\right)$之值. 〔95〕

30. 如果 a 与 b 都是整数，$a<b$，p 是自然数.

(1) 求在 a 与 b 之间分母为 p 的所有不是整数的分数之和 S.

(2) 试证，S 为整数的充分且必要条件是，$(-1)^a=(-1)^b$或者 $(-1)^p=-1$. 〔45〕

31. 设 $x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$，求 x^2+2x-1 之值. 〔73〕

32. 设 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，求 $\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}$ 之值. 〔74〕

33. 设 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b．试求 a，b 和 $a^2+\frac{1}{2}ab+b^2$. 〔215〕

34. 化简: 〔225, 228〕

(1) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; (2) $\sqrt{6}-\sqrt{\frac{2}{7-4\sqrt{3}}}$.

整 数 问 题

35. 试求满足方程 $2xy-4x-y-4=0$ 的自然数 x 和 y. 〔216〕

36. 求联立方程

$$\begin{cases} x^2-2xy+4yz-4z^2=5, \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

的整数解. 〔206〕

37. 已知 $n!$ 的末三位是 000，试求最小的 n. 〔169〕

38. 设M是这样的数的全体所成的集合，这种数能表示成不少于两个的相继自然数之和(例如 $5=2+3$，$12=3+4+5$).

(1) 试证对任意 $n \in M$，总存在自然数 l 和 m，使 $n = l(2m+1)$.

(2) 证明对任意自然数 l 和 m，都有 $l(2m+1) \in M$.

(3) 把不属于 M 的一切自然数从小到大排成数列 $\{a_n\}$，试求其通项. 〔129〕

39. (1) 试证，在形如 aba 的三位数中，若 $a+b$ 是 7 的倍数，则 aba 也是 7 的倍数（例如161，595）. 并且，请把这种偶数全部写出来.

(2) 类似地，在形如 abb 的三位数中，7 的倍数有怎样的规则？试推测这个规律并加以证明，再把这种奇数全部写出来. 〔223〕

40. 设以 p 进制表示的整数 M_p 的各位数码之和为 m_p，但 p 是适合 $2 \leqslant p \leqslant 10$ 的整数.

(1) 试证 M_{10} 和 m_{10} 被 9 除时有相同的余数，并且被 3 除时也是这样.

(2) M_p 为偶数的条件，当 p 为偶数时是 M_p 的个位数码为偶数；当 p 为奇数时是 m_p 为偶数. 〔118〕

41. 设 m, n 为自然数，满足 $10 \leqslant m < 100$，$10 \leqslant n < 100$，$m+n=100$. 试就十进制表示法而言：

(1) 证明 m^2 和 n^2 的最末二位数码（即个位和十位数码）是相同的.

(2) m^3 和 n^3 的最末二位数码之间有怎样的关系？试推测这个关系并加以证明. 〔198〕

42. (1) 正 n 边形的一个内角多少大？

(2) 把许多同样大小的正 n 边形铺在平面上而做到不留间隙，求 n 所有可能的值. 〔35〕

二、方程式

二 次 方 程

43. 设α和β为二次方程$t^2+2t+3=0$的两个解.

(1) 求$\alpha^2+\beta^2$之值.

(2) 求满足$\alpha x+\beta y+3=0$的实数x与y. 〔90〕

44. 试求一个二次方程，它的两个解各是方程$2x^2-3x+2=0$的两个解的2倍加1. 〔72〕

45. (1) 试决定满足关系式 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的整数a与b.

(2) 若 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ 是二次方程$x^2+sx+t=0$的解，试求有理数s与t. 〔229〕

46. 若$x=1+\sqrt{3}$满足$x^2+px+q=0$,试求有理数p与q.〔157〕

47. 二次式$f(x)=ax^2+bx+c$在$x=1$时有最小值-1，方程$f(x)=0$的两个解α与β满足关系式$\alpha^3+\beta^3=4$. 试求常数a，b与c. 〔166〕

48. 设 $a>b>0$，关于x的二次方程

$$x^2-(\log_2 b+\log_a 2)x+\log_a b=0$$

的两个解为-1与2，试求a与b. 〔171〕

49. 试求满足 $x^2+(y-3+i)x-3(y+2)+(y-2)i=0$ 的实数x与y. 〔189〕

50. 设二次方程$x^2-(a+i)x+(-2+2i)=0$对某实数a有实数解，求此a并求方程的实数解. 〔186〕

51. 设$\alpha+\beta i$是实系数二次方程$x^2+ax+b=0$的一个解，这里α与β为实数.

(1) 当$\alpha>0$，$\beta\neq0$时，试求点(a, b)存在区域，并以

图示之.

(2) 添设 $(\alpha+\beta i)^3$ 为实数的假定，点 (a,b) 应在怎样的曲线上？用式子表示. 〔214〕

52. 设 a 是大于 1 的常数. 若二次方程 $x^2-\frac{4}{\sqrt{a}}x+5-a=0$ 有两个相异的实根，试求 a 的范围；又若有重根，试求 a 的值，并求此时重根的值. 〔228〕

53. 设 a 为实常数，试求二次方程 $x^2+2ax+a^3+5a^2+5a+2=0$ 有实数解的充分且必要条件. 〔177〕

54. 设方程 $ax^2-x+1=0$（a 为实数）的解皆为实数，试证其中必有一个不大于 2 的正数解. 〔97〕

55. 在下列两命题 (A) 与 (B) 之中，要使其一成立而另一不成立，试求 a 的变化范围.

(A) 方程 $x^2+ax+1=0$ 有二相异负根；

(B) 方程 $4x^2+4(a-2)x+1=0$ 无实根. 〔222〕

56. 设二次方程 $x^2-2px+1=0$ 的一个解比 1 大，另一个解比 1 小，试求实数 p 的变化范围. 〔73〕

57. 设二次方程 $x^2-px+1=0$ 有两个相异的实数解 α 与 β，且满足 $\alpha^2+\beta^2\leqslant3$，试求实数 p 的变化范围. 〔165〕

58. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 为实系数的二次函数，它使关于 x 的方程 $f(x)+t(x-k)=0$ 对任意实数 t 都有实数解.

(1) 试证方程 $f(x)=0$ 必有实数解.

(2) 试求 k 与 $f(x)=0$ 的解之间的关系. 〔167〕

59. 对整系数的二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$，方程 $f(x)=0$ 的解 α 与 β 满足不等式 $\alpha>1$，$-1<\beta<1$.

(1) 写出 a 与 b 所满足的不等式.

(2) 当 a 固定时，在（1）的关系满足时求使 α 为最小的 b，把它用 a 表示出来.

(3) 在 (1) 的关系满足时，求使 a 为最小的 a 与 b 之值，并求此 a 的最小值. 〔82〕

60. 整系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个解 α 与 β 满足不等式 $\alpha>1$，$-1<\beta<0$. 若已知此方程的判别式等于5，试求 α 与 β. 〔25〕

61. 设实系数二次方程 $x^2+px+q=0$ 的实数解 α 与 β 满足不等式 $|\alpha+p|+|\beta+p|\leqslant 1$.

(1) 试求 p 与 q 之间的关系，并且图示点 (p, q) 的存在区域.

(2) 求 p^2+2q 的最大值和最小值. 〔73〕

62. 设二次方程 $x^2+4ax+3a+1=0$ 的两个根为 $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$，$\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$.

(1) 试求 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ 之值.

(2) 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，求 a 的变化范围. 〔226〕

63. 设二次方程 $(x^2+1)(1+\cos\alpha)+2x(1+\sin\alpha)=0$ 有实数解，试求 α 在 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ 的变化范围. 〔154〕

64. 设二次方程 $x^2-\frac{3}{2}x+a=0$ 的两个解为 $\sin\alpha$ 和 $\sin\beta$，试求 a 的变化范围. 〔150〕

65. 设方程 $2\cos 2x+4(a-1)\sin x-4a+1=0$ 在 $0\leqslant x<2\pi$ 中有两个相异实根，试求 a 的变化范围. 〔126〕

66. 在二次方程

$$ax^2-\sqrt{2}bx+c=0 \quad ①$$

中，a, b, c 为一钝角三角形的三边长，且以 b 为最长.

(1) 证明①有两相异实根.

(2) 证明这两个实根 α，β 都是正的.

(3) 若 $a=c$，试求 $|\alpha-\beta|$ 的变化范围. 〔143〕

67. 假定三个二次方程 $x^2-3x+a=0$，$2x^2+ax-4=0$ 和

$ax^2+bx-3=0$ 有公共解，试求整数 a 与 b． 〔181〕

68． 设 θ 为满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的常数．假定方程

$x^3-3x-2\cos\theta=0$ 与 $x^2+x\sin\theta-1=0$ 有公共解．

(1) 求 θ 的最小值 θ_1，并求此时的公共解 x_1．

(2) 求 θ 的最大值 θ_2，并求此时的公共解 x_2． 〔176〕

69． 对正整数 n，设使方程 $2x^2+2nx+m=0$ 有实数解的正整数 m 一共有 a_n 个．试就 n 为偶数与奇数两种情形，写出 a_n 的表示式；并对偶数 N，求 $\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$． 〔78〕

70． 设 n 为自然数，试求一个二次方程，它的两个解是二次方程 $x^2+2(n+1)x+6n-5=0$ 的两个实数解的整数部分（所谓一个实数的整数部分，是指不超过此实数的最大整数）． 〔72〕

71． 设以 $a,b,c(a>b\geqslant c)$ 为三边长的一个三角形并非直角三角形，假如将 a,b,c 都伸长或都缩短同一长度，使得它们成为一个直角三角形的三边之长．

(1) 试将伸长或缩短的长度用 a,b,c 表示．

(2) 如果原来的三角形是一个钝角三角形，试判断实际可能的是伸长还是缩短，并说明理由． 〔189〕

复 数 的 计 算

72． 求下列复数的实部和虚部： 〔99,153,228〕

(1) $\dfrac{2+i}{(1+i)^2}$； (2) $\left(i-\dfrac{1}{i^2}\right)^6$； (3) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1979}$．

73． (1) 对于复数 $a+bi$（a,b 为实数），要使适合 $a+bi=\dfrac{x+i}{x-i}$ 的实数 x 存在，求 a 与 b 的关系．

(2) 若 $\dfrac{1}{3}+bi=\dfrac{x+i}{x-i}$，求实数 b 与 x． 〔179〕

74. 设 $z=x+yi$ 使 $z^2+\frac{9}{z^2}$ 取实数，试描绘所有这种点 $P(x,y)$ 所形成的平面图形. 〔206〕

75. 试求适合下式的正数 a 和 b：

$$(a-bi)(ai-b)-2(3i+1)+b=0.$$ 〔215〕

76. 把 x^4+x^2-2 分解成四个一次式的积. 〔79〕

77. 设 x 和 y 是实数，$z=x+yi$，当 $|z|=1$ 时，求

$$u=|z^2-z+1|$$

的最大值和最小值. 〔75〕

高 次 方 程

78. 解方程 $x^4+4=0$. 〔227〕

79. 解方程 $x^3-8x^2+25x-26=0$. 〔198〕

80. 设 a,b,c 为实数，p,q,r 为正数.

(1) 证明方程 $(x-a)(x-b)=r$ 有两个实根.

(2) 设 (1) 中的两个实根为 α 与 β ($\alpha<\beta$)，如置

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)-(p+q+r)x+(ap+bq+cr),$$

试检查 $f(\alpha)$ 的正负号.

(3) 对 (2) 中的函数 $f(x)$，讨论方程 $f(x)=0$ 的实数解的个数. 〔170〕

81. 对实数 k，研究方程 $x^4+2x^3+(k-1)x^2-2x-k=0$ 的实数解的个数（重根算作一个解）. 〔200〕

82. 设关于 x 的方程

$$(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)=0$$

有四个相异的实数解，试图示点 (a,b) 的存在范围. 〔22〕

83. 为使由实参变量 a 给出的曲线

$$\begin{cases} x=a^2-2a, \\ y=a^4-4a^3-4a^2+7a+12 \end{cases}$$

与 x 轴不相交，试确定 a 的变化范围．〔179〕

84．设方程 $2x^4+bx^2+8=0$ 的四个解都是整数，求这些解和 b 之值．〔190〕

85．整系数三次方程 $x^3-ax^2+ax+2a+1=0$ 的三个解中正好有两个是正数，并且两两之和成比例，求这三个解与 a 之值．〔75〕

联 立 方 程

86．解联立方程

$$\begin{cases} x-2y+8z=7, \\ 2x+3y-5z=14, \\ 3x+4y+19z=-29. \end{cases}$$

〔192〕

87．解联立方程

$$\begin{cases} x+2y+2z=\dfrac{k+3}{2}, \\ x+3y+z=k, \\ x-y=\dfrac{k(k-1)}{2}; \end{cases}$$

此外，若要解 x, y, z 取正值，求这种 k 的变化范围．〔189〕

88．为使联立方程

$$\begin{cases} x^2-xy+2y^2=5, \\ y=2x+m \end{cases}$$

只有一组解，试求 m 的值．〔178〕

89．求联立方程

$$\begin{cases} ax+3y=0, \\ (b+3)x+ay=0 \end{cases}$$

有 $(x,y)=(0,0)$ 以外的解存在的充分且必要条件．〔29〕

90．求联立方程

$$\begin{cases} x^2-2xy+4yz-4z^2=5, \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

的整数解. 〔206〕

恒 等 式

91. 设对同时满足 $x+y-z=0$ 与 $2x-y+1=0$ 的任意 x，y 与 z，均有 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 成立，试求此时的 a,b,c 之值. 〔156〕

92. 设 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是不超过三次的多项式，对任意 x 都有 $p(x)\cos x=q(x)\sin x$ 成立. 试证 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都恒等于 0. 〔18〕

93. 设函数 $f(x)=2^x(ax^2+bx+c)$ 满足等式

$$f(x+1)-f(x)=2^x x^2.$$

试求常数 a，b 与 c 的值. 〔23〕

94. 设 $f(x)$ 是 x 的多项式，对任意实数 x，都有

$$f(f(x))=(f(x))^2.$$

求 $f(x)$. 〔186〕

95. 设 $a+b+c=a^2+b^2+c^2=2$，试证

$$a(1-a)^2=b(1-b)^2=c(1-c)^2.$$ 〔43〕

96. 设 a，b，c 是使等式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}=1$$

成立的任意三个数，则其中至少有一个为 0，试证明之. 〔220〕

97. (1) 试举例说明命题“若 $ab=0$，则 $a^2+b^2=0$”是不成立的.

(2) 设 $|a-b|=|a|+|b|$ 成立，那末 a 与 b 异号，或者二数之中至少有一个为 0.

(3) 试比较 a^2+5b^2-3ab 与 b^2+ab-5 哪个大? 〔224〕

整数与方程

98. 适合 $xy=27000$ 的二元数组 (x,y) 有多少? 〔72〕

99. 设 x, y, z 为自然数且 $x\geqslant y\geqslant z$, 试解方程

$$\log_2(x+y+z)=\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z.$$ 〔156〕

100. 设二次方程 $x^2+3x+a+3=0$ 的两个解都是整数.

(1) 试证其中一个解是奇数, 另一个是偶数.

(2) 试证 a 为负奇数.

(3) 若两个解同号, 求这两个解以及 a 的值. 〔151〕

101. (1) 设 m 与 n $(m>n)$ 为自然数, $\triangle ABC$ 的三边长 a, b, c 分别有关系

$$a=m^2+n^2,\ b=m^2-n^2,\ c=2mn.$$

试证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

(2) 在 (1) 的直角三角形中, 试求面积与周长相等的那些三角形. 〔72〕

102. (1) 设 a 和 b 为非负实数, 试将 $|a-b|+a+b$ 用 $\max(a,b)$ 来表示, 这里 $\max(a,b)$ 表示 a 与 b 二数中不小的一个.

(2) 对整数 m 与 n, 假定有面积为 $\big||m|-|n|\big|+|m|+|n|$, 周长为 8 的矩形存在, 求这种整数组 (m,n) 的数目. 〔72〕

三、不 等 式

解 不 等 式

103. 解不等式 $4x^2+12x+9>0$. 〔103〕

104. 解不等式 $x^3-210x^2-10000x<0$. 〔100〕

105. 解不等式 $\sqrt{\frac{1}{2}x+1}-1>\frac{1}{5}(2x-7)$（参见题123）. 〔36〕

不 等 式 的 证 明

106. 证明不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2.$$ 〔160〕

107. (1) 设 $(a+b)(x+y)\leqslant 2(ax+by)$，试证

$$\frac{x-y}{a-b}+\frac{a-b}{x-y}\geqslant 2.$$

这里 $a\neq b$，$x\neq y$.

(2) 设 a,b,c 都是正数，$ab+bc+ca=1$，证明 $a+b+c$ 的最小值为 $\sqrt{3}$. 〔189〕

108. 设 a,b,c,d 为满足 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ 的正数，试分别就 $b>2d$ 与 $b<2d$ 两种情形，求三数 $\frac{c}{d}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{a-2c}{b-2d}$ 之最大者.

〔74〕

109. 设实数 x 与 y 满足不等式

$$x^2+x^2y^2+y^2+2xy\leqslant a^2\quad(a>0).$$

试证 $|x|$ 与 $|y|$ 都不超过 $\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4a})$. 〔120〕

110. 设 x 与 y 为实数，$x+y+z=a$，$yz+zx+xy=b$. 试将 $x^2+y^2+z^2$ 用 a 与 b 表示，从而证明

$(x^2+y^2+z^2)^3 \geqslant (x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$. 〔94〕

不等式研究

111. 设 $a\neq 0$，$f(x)=ax^2+bx+c$. 试对 $p>0$，$q>0, p+q=1$，研究 $pf(x)+qf(y)$ 与 $f(px+qy)$ 的大小关系. 〔97〕

112. (1) 设 $t>0$,

$$f(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1},$$

$$g(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}.$$

证明 $f(t)$ 的最小值为 $2+\sqrt{3}$，$g(t)$ 的最大值为 $2-\sqrt{3}$.

(2) 设对任意正数 x 和 y，以

$$a=\sqrt{x^2+xy+y^2},\ b=p\sqrt{xy},\ c=x+y$$

为三边长的三角形皆存在，试确定 p 的变化范围. 〔38〕

113. 对题 142 中的函数 $f(x)$，试比较 $f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)$ 与 $f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$ 的大小. 〔16〕

114. 为使对满足 $u^2+v^2>0$ 的任意实数 u 与 v 都有

$$Au^2+2Buv+Cv^2>0$$

成立，试求关于 A, B, C 的条件. 〔161〕

115. 设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

(1) 为使对满足 $-\operatorname{tg}\theta<x<0$ 的 x，都有 $x^2-1\leqslant 2x\cdot\operatorname{tg}\theta$

成立，试决定 θ 的变化范围.

(2) 为使对满足 $x^2-1<2x\cdot \mathrm{tg}\,\theta$ 的 x，都有 $|x|\leqslant 2+\sqrt{3}$ 成立，试决定 θ 的变化范围. 〔111〕

116. 试求使 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$ 对于任意正数 x 与 y 成立的最小正数 a. 〔183〕

117. 过点 (1, 2) 有斜率为 m 的直线以及一条抛物线 $y=x^2-x+2$, 为使直线在抛物线的上方，试就 i) $m>1$; ii) $m=1$; iii) $m<1$ 三种情形，讨论 x 的变化范围. 〔214〕

四、函数与图象

二 次 函 数

118. 设 $f(x)=x(2-x)$. 定义 $F(x)$ 如下:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 若\quad 0\leqslant x\leqslant 2; \\ f(-x), & 若 -2\leqslant x<0. \end{cases}$$

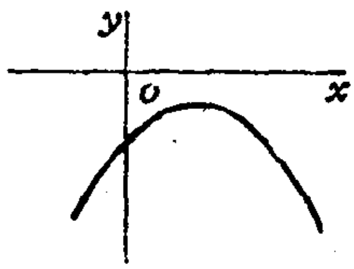
试作 $y=F(x)$ $(-2\leqslant x\leqslant 2)$ 的图象. 〔163〕

119. 设在边长为 5 cm 的正方形 $ABCD$ 的边界上，有动点 P 从顶点 B 出发，依次经 C, D, A 而回到 B 这样变动. 今以 x 表示走过的路程，y 表示以 BP 为一边的正方形面积，试将 y 用 x 表示出来，并作它的图象. 〔175〕

120. 右图的抛物线是方程 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，请在下面的空格 $\square$ 中填上适当的不等号:

$a\ \square\ 0$, $b\ \square\ 0$, $c\ \square\ 0$,

$b^2\ \square\ 4ac$. 〔76〕



120.

121. 为使从联立方程

$$\begin{cases} y=|x^2-4x+3|, \\ y=a \end{cases}$$

中消去 y 所得的关于 x 的方程有四个相异的实数解，求 a 的变化范围. 〔105〕

122. (1) 作函数 $y=|x^2-8x+12|$ 的图象.

(2) 若直线 $y=2x+k$ 在 $2<x<4$ 的范围内与(1)中的曲线相切，试求 k 的值.

(3) 在(2)的场合，该直线与曲线有三个交点. 除此之外，若直线 $y=2x+k$ 也与曲线有三个交点，试求 k 值以

及交点的坐标. 〔216〕

分式及无理函数

123. 设 $a\neq 0$, 试描绘 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 的大致图象, 并说明理由. 〔36〕

124. 设曲线 $y=\dfrac{2-x}{x-1}$ 是由曲线 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 沿 x 轴正向平移 a, 沿 y 轴正向平移 b 而得, 求 a 与 b 的值. 〔87〕

125. 把函数 $y=\dfrac{(2a-1)x+1}{x-a}$ 的图象沿轴正向平移 $\square$, 沿 y 轴正向平移 -5, 则与反函数的图象一致, 如此 $a=\square$. 〔156〕

126. 已知曲线 $y=ax^2-\left(3a+\dfrac{1}{2}\right)x+2a+\dfrac{3}{2}$ 和 $y=\dfrac{1}{x}$ 有两个与 a 无关的交点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

(1) 求 x_1, y_1, x_2, y_2, 其中 $x_1<x_2$.

(2) 为使对闭区间 $[x_1,x_2]$ 中的任何 x 都满足

$$ax^2-\left(3a+\frac{1}{2}\right)x+\left(2a+\frac{3}{2}\right)\geqslant\frac{1}{x},$$

求 a 的范围. 〔174〕

函数的最大值与最小值

127. 已知函数 $f(x)=x^2-3|x|+2$.

(1) 解方程 $f(x)=0$.

(2) 作 $y=f(x)$ 的图象.

(3) 求函数 $y=f(x)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 4$ 的最大值与最小值. 〔4〕

128. 求函数 $f(x)=x|x|-2x-|x|$ 在 $-1\leqslant x\leqslant a$ 的最小值. 〔184〕

129. 把定长 a 的金属丝分成两段, 一段围成一个正三角形, 一

段围成一个正六边形，如何分法使面积之和最小？〔74〕

130. 设 $a\geqslant 1$，$f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & \text{若 } x\geqslant a-1;\\ x-(a^2-a-2), & \text{若 } x<a-1.\end{cases}$ 试求在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 范围内求 $y=f(x)$ 的最大值和最小值.〔211〕

131. 设在正三角形 ABC 的边 BC,CA,AB 上各取一点 P,Q,R，使 $CQ=2BP$，$AR=3BP$.

(1) 如正三角形的边长为 a，$BP=x$，$\triangle PQR$ 的面积为 S，试求 S 关于 x 的函数表达式.

(2) 求使 S 的值为最小的 x 值，并求此最小值.〔164〕

132. 设 p 为实数，x 的二次函数 $y=x^2-2px+p-1$ 的最小值为 $f(p)$，试求 $f(p)$ 在 $0\leqslant p\leqslant 2$ 的最大值和最小值.〔165〕

133. 对 $f(x)=x^2-2px+q$，$g(x)=-x^2+6x-7$ 这两个函数，用 $h=g\circ f$ 记其复合函数（即 $h(x)=g(f(x))$.

(1) 为使函数 $h(x)$ 有最大值 1，求关于 p 和 q 的条件；为使函数 $h(x)$ 有最大值 2，求关于 p 和 q 的条件.

(2) 当 $p=1$，$q=3$ 时，求方程 $h(x)=-2$ 的实数解，并求方程 $h(x)=a$ 有四个相异实解的（关于 a 的）条件.〔78〕

134. 求函数 $y=-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}$ $(x>0)$ 的最小值，这里 $a>0$，$b>0$。〔174〕

135. 求平面上两点 $\left(x+\dfrac{1}{x},x-\dfrac{1}{x}\right)$ 与 $(1,0)$ 之间距离的最小值，但 $x>1$.〔148〕

136. 设凸四边形 $ABCD$ 的对角线直交于 O，$\triangle AOD$ 的面积 $S_1=18\text{ cm}^2$，$\triangle COB$ 的面积 $S_2=8\text{ cm}^2$. 试证，当这种四边形的面积最小时，$AD\parallel BC$。〔214〕

杂　题

137. (1) 对函数 $f(x)=\dfrac{-2x+3}{2x-7}$，求使 $f(x)=x$ 成立的 x 的值.

(2) 对 (1) 的两个 x 值 a 与 b $(a<b)$，求使

$\dfrac{f(x)-a}{f(x)-b}=k\,\dfrac{x-a}{x-b}$ 成立的常数 k 的值.

(3) 对由 $a_1=1$，$a_n=\dfrac{-2a_{n-1}+3}{2a_{n-1}-7}$ $(n\geqslant2)$ 定义的数列 $\{a_n\}$，求其通项 a_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的值.　〔25〕

138. 设方程 $y=x^3-(ab-a+b-1)x^2+(a^2+ab+a)x-2a^2+1$ 的图象对任何实数 a 均通过一定点，试求 b 的值以及定点的坐标.　〔169〕

139. 今有以 $A(-1,-1)$，$B(1,-1)$，$C(1,1)$，$D(-1,1)$ 为顶点的一个正方形，设它在折线 $y=|x-a|+a$ 上侧部分的面积为 S. 试求 S 关于 a 的函数表达式，并描绘其图象.　〔183〕

140. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=4$，$\angle A=90°$，并设 L,M,N分别为边 BC,CA,AB 的相应中点. 对边 AB 上的任一点D，命 $BD=x$；过D 作 $DE\parallel AC$ 并交 BC 于 E，以线段 DE 为一边在B的异侧作正方形，并记矩形 $LMAN$ 与此正方形的公共部分的面积为y. 试求 y 关于 x 的函数表达式，并描绘此函数的图象.　〔201〕

141. 设函数 $f(x)$ 满足

$$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^3-x^2+4x+3}{x+1},$$

试求 $f(x)$。　〔142〕

475697

142. 给定函数 $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{|x|^3}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时.} \end{cases}$

求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$. 〔16〕

143. 为使 x 的函数 $y=\left(1-\dfrac{a}{2}\cos^2 x\right)\sin x$ 有最大值 1，试求 a 的范围. 〔18〕

144. 已知 $f(x)=\operatorname{tg} x$，$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$f''(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$，求满足

$$\begin{cases} f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=0, \\ f'(\alpha)+f'(\beta)+f'(\gamma)=9, \\ f''(\alpha)+f''(\beta)+f''(\gamma)=0 \end{cases}$$

的 α，β，γ，但 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$. 〔5〕

145. 对实数 x，以〔x〕表示满足 $n\leqslant x<n+1$ 的整数 n. 现对正数 x，定义 $f(x)=\left|\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right]\right|$.

(1) 求使 $f(x)=0$ 成立的 x 值的集合.

(2) 描绘 $y=f(x)$ 的图象. 〔96〕

五、指数函数与对数函数

指数函数与对数函数

146. 求值：(1) $4^{\log_2 3}$；(2) $(\log_2 8+\log_3 9)(\log_5 125+\log_{\frac{1}{7}} 49)$；

(3) $\log_5 \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.〔162, 195, 206〕

147. 化简 $\log\left(\dfrac{a^4}{a+1}-\dfrac{1}{a^5+a^4}\right)-\log\left(a^3+a+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^3}\right)$，这里 $a>1$. 〔206〕

148. 已知 $\log_3 2=a$，$\log_5 2=b$，试把 $\log_{30} 90$ 用 a 与 b 表示. 〔157〕

149. 设 $p=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$q=1-p$，求 $\dfrac{\log p}{\log q}$ 的值. 〔25〕

150. 已知 $3^x+3^{-x}=4$，求 27^x+27^{-x} 的值. 〔214〕

151. 已知 $(12.5)^a=1000$，$(0.0125)^b=1000$，求 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$的值. 〔181〕

152. 设 s 与 t 为不等于 1 的正数，

$x=\log_s t+\log_t s$，

$y=(\log_s t)^4+(\log_t s)^4-6\{(\log_s t)^2+(\log_t s)^2\}+10$.

试将 y 用 x 表示. 〔22〕

153. 设坐标满足 $\dfrac{\lg(4-|x-2|)}{\lg 2y}=\dfrac{1}{2}$ $\left(y\neq\dfrac{1}{2}\right)$ 的点 (x, y) 的全体所形成的图形为 C，直线 l 的方程为

$$y=a(x+1)+\frac{1}{2}.$$

(1) 图示C.

(2) 为使 l 和 C 恰好有一个公共点，求a 的变化 范 围.

〔23〕

指数对数方程

154. 解方程 $\log_2(x-4)=\log_4(x-2)$. 〔74〕

155. 解方程 $x^{\lg x}=1000x^2$. 〔90〕

156. 解方程 $\left(\log_2\frac{3}{4}x\right)(\log_2 3x)=\log_3 27$. 〔146〕

157. 解方程 $\frac{1}{6}\log_2(2+x)+\frac{1}{3}\log_4(3-x)=\frac{1}{2}\log_8(4-2x)$.

〔208〕

158. 解联立方程

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(\log_2 x+\log_2 y)=\log_2\left(\frac{x+y}{2}\right),\\ \frac{1}{3}(\log_3 x+\log_3 y)=\log_3\left(\frac{x+y}{3}\right).\end{cases}$$

〔154〕

159. 解联立方程

$$\begin{cases}x^2+y^2=80,\\ \log_2 x+\log_2 y=5.\end{cases}$$

〔217〕

160. 求满足 $x^{xyz}=y^2$, $y^{xyz+1}=z^3$, $z^{xyz+2}=x^4$ 的正数 x,y,z.

〔189〕

161. 设 x 与 y 为二正数，满足

$$xy=490,\quad (\lg x-\lg 7)(\lg y-\lg 7)=-\frac{143}{4}.$$

试问 x 与 y 中较大之数的整数部分是几位数？ 〔117〕

指数对数不等式

162. 解不等式 $2(\log_2 x)^2+5\log_2 x+2\leqslant 0$. 〔99〕

163. 求满足不等式$\frac{1}{5}<\log_a 2\leqslant\frac{1}{4}$的正整数 a 的不同值的个数.

〔165〕

164. 为使对适合不等式 $|x-l|<a$ 的每一个 x，都有

$$\log_3(x-3)<\log_9(3x-5).$$

试求整数 l 一切可能的值，并对每一 l 决定正数 a 的变化范围. 〔201〕

165. 试确定同时满足 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>8$ 及 $\log_3(x+4)<2$ 的 x 的范围. 〔204〕

166. 设 $p_i>0$，$x_i>0$　$(i=1,2,\cdots,n)$，试证不等式

$$p_1\lg x_1+p_2\lg x_2+\cdots+p_n\lg x_n$$
$$\leqslant(p_1+p_2+\cdots+p_n)\cdot\lg(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$ 〔97〕

最大值最小值问题

167. 求 $y=(\log_3 x)^2+\log_3 x^2+2$ 的最小值以及相应的 x 值.

〔121〕

168. 设 $a>1$，$x+y=6$，$\log_a 9=b$，试将 $\log_a\sqrt{xy}$ 的最大值用 b 表示. 〔184〕

169. 设 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，求 $\log_2(1+\sin x)+\log_2(1-\sin x)$ 的最小值. 〔199〕

六、三角函数

三 角 函 数

170. 设 $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{8}{3}$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值. 〔146〕

171. 设 $\operatorname{tg}\theta=5$，求 $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}$ 的值. 〔165〕

172. 设 $\operatorname{tg}\theta=\frac{3}{4}$，求 $\frac{\sin\theta}{1-\operatorname{ctg}\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}$ 的值. 〔178〕

173. 设 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$，求 $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$ 的值. 〔182〕

174. 设 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求 $\sin\theta\cos\theta$ 以及 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 的值. 〔189〕

175. 设 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin\theta+\cos\theta$ 以及 $\sin^4\theta-\cos^4\theta+\operatorname{tg}\theta$ 的值. 〔211〕

176. 设 θ 是第二象限的角并且 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，求 $\operatorname{tg}\theta$ 的值. 〔214〕

177. 设 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$，求 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$ 的值. 〔89〕

178. 设 $\operatorname{tg}\theta=-3\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin\theta$ 的值. 〔99〕

179. 设 $u_n=\sin^n\theta+\cos^n\theta$，试证 $6u_{10}-15u_8+10u_6$ 的值与 θ 无关. 〔178〕

180. 设 $\sin x+\cos x=-1$，试对自然数 n，求 $\sin^n x+\cos^n x$ 的值. 〔208〕

181. 化简 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi-\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi+\theta)$. 〔225〕

182. 已知平面上四点 $A(0,1)$, $B(0,2)$, $C(0,3)$, $D(-3,3)$, 并设 $\angle ADC=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, $\angle ADB=\gamma$. 求 $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$. 〔228〕

183. 设 $\sin x+\sin y=1$, 求 $\cos x+\cos y$ 的取值范围. 〔196〕

184. 设 $A=\left\{a: a=\cos\frac{5m\pi}{12},\quad m=1,2,3,\cdots\right\}$,

$$B=\left\{b: b=\cos\frac{n\pi}{12},\quad n=1,2,3,\cdots\right\}.$$

(1) 证明 $A=B$。

(2) 设 $C=\left\{x: x\text{ 为大于 }\frac{1}{2}\text{ 的实数}\right\}$, 求属于 $A\cap C$ 的所有数. 〔30〕

185. 设 $f(x)=1+2\cos x+3\sin x$. 若对任意 x 成立恒等式

$$af(x)-bf(x-c)=1,$$

试确定常数 a, b 与 c. 〔38〕

186. 求平面曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 交点的坐标. 〔41〕

187. 点 A 从原点出发沿 x 轴正向以固定速度 v 运动, 点 B 从 $(0,-2)$ 与 A 同时出发以同样的速度作直线运动. 已知 A 与 B 间的最短距离为 1.

(1) 求 B 的运动方向与 x 轴正向的夹角 θ.

(2) 求 A 与 B 距离最短时这两点的坐标. 〔78〕

方程以及不等式

188. 对 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$, 解方程 $2\sin^2\theta+5\cos\theta+1$. 〔157〕

189. 对 $0\leqslant x\leqslant\pi$, 解方程 $\cos^2x-\sin x+1=0$. 〔194〕

190. 对 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, 解方程 $6\cos x+\sqrt{3}\operatorname{tg}x=0$. 〔86〕

191. 设 $\cos\theta=\sin^2\theta$, 求 $\cos\theta$ 的值. 〔221〕

192. 对 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, 解不等式 $2\cos x-\sqrt{3}>0$. 〔22〕

193. (1) 对实数 x，用 x 表出满足 $\cos y=\sin x$ 的 y.

(2) 就 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$-\pi\leqslant y\leqslant 2\pi$ 的范围，绘出 (1) 中关系式的图象.

(3) 若 x 与 y 同时满足 $|y-x|<\pi, \cos y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$，求当 x 值确定时 y 有唯一确定值的 x 之值. 〔88〕

194. 为使满足 $\cos\theta-\sin^2\theta=\alpha$ 的 θ 存在，求实数 α 的变化范围. 〔202〕

最大值最小值问题

195. 对 $30°<\theta\leqslant 90°$，求 $y=\sin\theta+\dfrac{1}{2\sin\theta}$ 的最大值与最小值，并求相应的 θ 值. 〔202〕

196. 求 $y=\sin^4x+\cos^4x$ 的取值范围. 〔226〕

197. 设 $a>0$，$0\leqslant x<2\pi$. 若函数 $y=\cos^2x-a\sin x+b$ 的最大值为 0，最小值为 -4，试求 a 与 b 的值，并求使 y 取最大值和最小值的 x 值. 〔117〕

图形与三角函数

198. 设 R，S 为以 O 为圆心以 1 为半径的圆周上的两定点，$\angle ROS$ 是直角. 过线段 OS 的延长线上的点 P 引弧 $\overset{\frown}{RS}$ 的切线，与过 R 而平行于 OP 的直线交于 Q. 设 $\angle OPQ=x$，试将梯形 $OPQR$ 的面积 $S(x)$ 这个 x 的函数表示出来. 〔52〕

199. 已知 $\cos A\cos B+\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A\sin B=2$，试问 $\triangle ABC$ 的形状如何? 〔171〕

200. 设 $\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 的对边长为 a，b，c，并且 A，B，C 到对边的垂线长为 h_1，h_2，h_3. 已知 $ab:bc:ca=2:(\sqrt{6}+\sqrt{2}):(\sqrt{3}+1)$，求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 以及 $h_1:h_2:h_3$. 〔159〕

201. 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上有动点 P 从 (1,0) 出发作逆时针方向的等速圆周运动，已知1分钟转过角 θ $(0<\theta\leqslant\pi)$，2分钟到达第三象限，14分钟又回到出发位置，求 θ。〔162〕

202. 设 $\triangle ABC$ 不是直角三角形，试证

$$(a^2-b^2+c^2)\operatorname{tg}B=(a^2+b^2-c^2)\operatorname{tg}C.$$ 〔178〕

203. 已知在直角三角形 ABC 中，斜边 BC 的长为 l，两直角边长之和为 m，试将 $\sin B+\sin C$ 以及 $\triangle ABC$ 的面积 S 用 l 与 m 表示出来. 〔179〕

204. 证明在 $\triangle ABC$ 中，有下列关系成立：

(1) $$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

(2) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leqslant\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$$

$$<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$ 〔105〕

205. 半径为 r 的圆内接三角形的三边长之比为5:6:7，求此三角形的面积. 〔201〕

206. 小李应用正弦定理证明正弦函数的加法定理 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$（对于 α，β 均为锐角的情形），其证明过程如下，请在空格中填上适当的式子，并继续完成它："设在任作 $\triangle ABC$ 中，$AH=h$，$AH\perp BC$，$\angle HAB=\alpha$，$\angle HAC=\beta$，A，B，C 对应边长为 a，b，c. 在 $\triangle ABH$ 中，BH 的长可用 a 与 h 表示为 $BH=\square$，$\angle B$ 可用 α 表示为 $\angle B=\square$. 又在 $\triangle ACH$ 中，CH 和 AC 的长可用 β 和 h 表示为 $CH=\square$，$AC=\square$. 由于 $\angle A=\alpha+\beta$，因此……" 〔179〕

三角函数的加法定理

207. 已知 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$，求 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$. 〔89〕

208. 已知 $\sin 2\theta=-\frac{1}{4}$，$\cos 2\theta>0$，求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$. 〔72〕

209. 已知 $\operatorname{tg} x=\frac{1}{3}$ $(0<x<\pi)$，$\operatorname{tg} y=-\frac{1}{7}$ $(0<x<\pi)$，试求 $\sin 2x$ 与 $\sin(2x-y)$ 的值. 〔150〕

210. 已知 $6\cos 2\alpha-7\sin\alpha+6=0$ 并且 $\sin\alpha>\operatorname{tg}\alpha$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$ 的值. 〔173〕

211. 为使 $\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{2}\sin(x+\alpha)=0$ 成为恒等式，求 α 的值，但 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$. 〔79〕

212. (1) 证明等式 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

(2) 利用 (1) 的等式把 $\sin^2(n+1)x-\sin^2 nx$ 表成积的形式。

(3) 把 $\sin^2(n+1)x-2\sin^2 nx+\sin^2(n-1)x$ 表成积的形式. 〔62〕

213. 求 $y=2\sin x-\cos 2x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小值以及相应的 x 值. 〔50〕

214. 对函数 $f(\theta)=a\sin\theta+b\cos\theta$.

(1) 若 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，并且 $f(\theta)$ 的最大值为 $\sqrt{10}$，求 a 与 b 的值。

(2) 若 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$，试求 $f(\theta)$ 的最小值 l 的取值范围. 〔98〕

215. 就函数 $y=\frac{\operatorname{tg} 3\theta}{\operatorname{tg}\theta}$ 而言：

(1) 对 $\operatorname{tg}\theta=x$，将 y 用 x 表示；

(2) 求 y 的取值范围．〔26〕

216. 在坐标平面上图示满足不等式 $\sin^2 x-\sin^2 y\geqslant 0$ 的点 (x,y) 的存在区域．〔81〕

217. 设 D_1 为不等式 $x^2+(y-2)^2\leqslant 1$ 所表示的区域，D_2 为联立不等式 $\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 2x-4,\\ y+2x-8\leqslant 0\end{cases}$ 所表示的区域．对于 D_1 中的点 (x_1,y_1) 和 D_2 中的点 (x_2,y_2)，求

$$z=2y_1-2y_2-3x_1+3x_2+1$$

的最大值和最小值．〔81〕

218. 为使对满足 $x^2+y^2=1$ 的任意二实数 x，y，都有不等式 $(ay)^2+(ax+by)^2<1$ 成立，试求关于 a 与 b 的条件，并描绘点 (a,b) 的存在区域．〔161〕

219. 设定点 P 位于圆心在原点的单位圆周上．在圆的内部或圆周上取两点 Q 与 R，做一边长为 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 的正三角形 PQR，求 OQ^2+OR^2 的最大值与最小值．〔15〕

220. 设 $\triangle ABC$ 中顶点 B 与 C 对应的边长分别为 b 与 c，并且 $\dfrac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}=\dfrac{b+c}{c}$，求角 A．〔20〕

221. 在锐角三角形 ABC 中，$\angle A=60°$．设在其内部同时满足 $PA\leqslant PB$，$PA\leqslant PC$ 的点 P 的全体形成的区域为 G．若 $\triangle ABC$ 的面积为区域 G 的面积的三倍，问 $\triangle ABC$ 是怎样的三角形？〔40〕

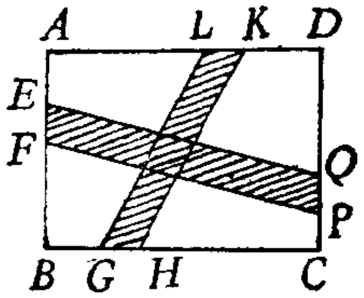
222. 在右图长方形土地 $ABCD$ 中，斜线部分表示道路．已知

$$EF=GH=PQ=KL,$$

$AD:AB=3:2$，　$AB:EF=200:3$，
$AD=a$，$\angle BFP=\alpha$，$\angle ALG=\beta$.
设此长方形除道路之外的总面积为 S.

(1) 求 S.

(2) 求 $S=\frac{6501}{10000}a^2$ 的条件.



222.

〔117〕

七、图形与方程

点 与 直 线

223. 已知两点 $A(-1,5)$，$B(5,-1)$，试求通过点 A 且与 AB 垂直的直线方程. 〔179〕

224. 设对实数 x，y $(xy\neq0)$，成立着

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}=\frac{x+y}{1+x+y} \quad ①$$

(1) 试求 $x+y$ 的值.

(2) 描出满足①的点 (x,y) 的图形. 〔181〕

225. 已知平面上两直线 $l_1: x+ay=1$，$l_2: ax+y=1$，试问：

(1) a 为何值时 l_1 与 l_2 平行?

(2) a 为何值时 l_1 与 l_2 重合?

(3) 除上述两情况外，求它们的交点. 〔209〕

226. 设方程 $y^2+xy+ax^2-5x-1=0$ 表示两条直线，求此时 a 的值，并求该两直线的（较小一个）夹角. 〔171〕

227. 设方程 $x^2-xy-2y^2-2x+y+k=0$ 表示两条直线，求通过此二直线交点与点 $(1,1)$ 的直线方程. 〔93〕

228. 求以 $P(1,0)$，$Q(0,1)$，$R(\cos\theta,\sin\theta)$ 这三点为顶点的三角形的面积 $S(\theta)$. 〔63〕

229. 已知三直线 $x+2y-5=0$，$2x+y-7=0$，$y-x-1=0$，试求由它们所围成的三角形的面积和外接圆方程. 〔178〕

230. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的坐标是 $(3,4)$，顶点 B 在第二象限，重心坐标是 $(1,1)$.

(1) 设顶点 B 的坐标是 (a,b)，试将顶点 C 的坐标用 a，

b 表示出来.

(2) 若垂心的坐标是 $(0,0)$，求 a 和 b 的值. 〔111〕

231. 设 m 为常数，$|m|\leqslant 1$. 直线 $l_1: y=mx+1$ 和 $l_2: x=-my+1$ 的交点为 $P(x_0, y_0)$.

(1) 设直线 l_1，l_2 分别通过定点 A，B，求 A，B 的坐标.

(2) 把点 P 的坐标用 m 表示出来.

(3) 把 $\triangle ABP$ 的面积 S 用 m 表示出来.

(4) 求使面积 S 最大的 m 值. 〔98〕

232. 设 P 为曲线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $y=h$ $(h>0)$ 的交点.

(1) 求 $y=\sqrt{x}$ 的经过点 P 的切线 l_1 的方程.

(2) 求直线 $y=h$ 关于 l_1 的对称直线 l_2 的方程.

(3) l_2 通过一个与 h 无关的定点，求此定点的坐标. 〔87〕

233. 直交的半直线 OX, OY 上各有一点 A，B，$OA=2$，$OB=1$. 线段 OA 上有一动点 P，OB 的延长线上有动点 Q，AB 和 PQ 的交点为 M。如 P，Q 保持着 $PA=BQ$ 的关系，且分别接近于 A，B，试问点 M 向何处接近? 〔154〕

234. 试证圆 $x^2-4x+y^2+1=0$ 与通过点 $(-1,0)$、$(1,0)$ 的圆 C 在交点的切线是互相垂直的. 〔230〕

235. 设有曲线 $S: xy=1$. 通过点 $A(a,0)$ $(a>0)$，作一条斜率为 m $(m<0)$ 的直线交 S 于 B、C 两点，又交 y 轴于 D 点. 这些点的顺序为 A、B、C、D。

(1) 证明 $AB=CD$.

(2) 若 $AB=BC=CD$，试把 m 用 a 表示出来.

(3) 证明，在 (2) 的条件下，$\triangle OAD$（O 为原点）的面积是一个与 a 无关的定值. 〔223〕

抛物线与直线

236. 要使两函数 $y=|x|$ 和 $y=x^2+ax+b$ 的图象有四个相异的

交点，试求 a 与 b 满足的条件，并描绘在此条件下，点 (a,b) 的存在范围．〔168〕

237. 设有曲线 $L: y=-x|x|$．

(1) 作曲线 L 的图象．

(2) 以原点 O、定点 $A\left(0,\dfrac{3}{8}\right)$ 与曲线 L 上的点 P 为顶点作等腰三角形，试求 P 点可能有的坐标．〔189〕

238. 设有抛物线 $L: y=-x^2+\dfrac{9}{2}x-4$．通过原点 O 作 L 的这样一条切线 $y=mx$，使其切点 P 在第一象限．

(1) 求斜率 m 的值以及 P 点的坐标．

(2) 过 P 点作切线的垂线，与抛物线的另一交点为 Q，求 Q 点的坐标．

(3) 设 L 上有一点 $R\left(t,\ -t^2+\dfrac{9}{2}t-4\right)$．为使 $\triangle OPQ$ 的面积小于 $\triangle PQR$ 的面积，试求 t 的变化范围．〔193〕

239. 设抛物线 $c: y=-x^2+2ax+b$ 的顶点在直线 $l: mx-y-2m+1=0$ 上变动．

(1) 为使抛物线 $c': y=x^2$ 与 c 有交点，试求 m 的变化范围．

(2) 当 $m=-1$ 时，为使抛物线 c 与 c' 有交点，试求 a 的变化范围．〔36〕

240. 通过 x 轴上的点 $A(a,0)$ $(a>0)$ 向抛物线 $y=x^2+1$ 引两条切线 AP，AQ，设切点分别是 P，Q．

(1) 求直线 PQ 的方程．

(2) 试证，不论点 A 在 x 轴上如何变动，直线 PQ 必通过一定点．〔180〕

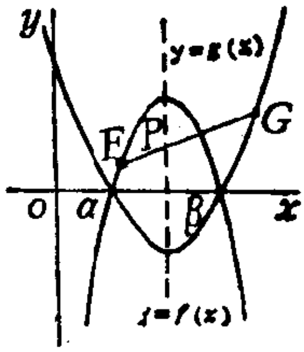
241. 右图中，两条抛物线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 相交于 x 轴上相异两点 $(\alpha,0)$，$(\beta,0)$，且其顶点各在 x 轴相对两侧．又过定

点 $P\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ y_0\right)$ 所引的任意直线，与 $y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 在关于 P 点的相对两侧的交点分别记为 F，G 的话，总成立着

$$\frac{FP}{PG}=k\ (\ k\ 为常数\ ).$$

试求 $f(x)$ 与 $g(x)$，但假定

$0<k<1$，$y_0>0$. 〔202〕



241.

圆

242. 设 $x>0$，$y>0$，试描绘下列曲线的圆形：

$$(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x+y)(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})+2y^2=1.$$ 〔146〕

243. 在空格□内填入适当的数字：通过两点 $A(4,4-4\sqrt{2})$，$B(8,8)$ 的圆 $x(x-□)+y(y-□)=0$ 的半径是□．以 B 点为切点的外切正三角形的三个顶点坐标是 $(8+□\sqrt{3},\ □-4\sqrt{3})$，$(8-□\sqrt{3},\ □+4\sqrt{3})$，$(□,\ -4)$. 〔215〕

244. 平面上一动点 P 自原点 $(0,0)$ 出发，向 x 轴正向前进路程 a $(a>0)$，再向左转 90° 前进路程 ar $(r>0)$，再向左转 90° 前进路程 ar^2，循此方式继续.

(1) 若 r 满足 $0<r<1$，试求 P 的极限位置 Q.

(2) 若 r 在 $0<r<1$ 的范围内变动，试求 Q 的变化范围 C.

(3) 要使 C 含在以点 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$ 为顶点的三角形（包括边界）之内，试求 a 应满足的条件.

〔65〕

245. 试求直线 $y=2x+1$ 被圆 $x^2+y^2-2y-1=0$ 所截的线段之长. 〔72〕

246. 试求曲线 $x^2+y^2-x+2y=0$ 关于直线 $x-y+1=0$ 对称的曲线方程. 〔185〕

247. 试求两圆 $x^2+y^2=1$ 与 $(x-4)^2+y^2=4$ 的四条公切线 $y=mx+b$ 中的四个 m 值. 〔205〕

248. 考察圆心为 (a,a^2) 且与 x 轴相切的圆，记此圆为 $C(a)$. 当 $C(a)$ 的圆心在抛物线 $y=x^2$ 上变动时 $(a\neq 0)$，记 $C(a)$ 的全体为 E.

(1) 为使圆 $C(a)$ 与圆 $C(b)$ 相外切，试求关于 a 与 b 之间的条件.

(2) 为使圆 $C(a)$ 只与 E 中唯一的圆外切，求 a 的值.

(3) 对于除去由 (2) 规定的 a 值，当 $C(a)$ 与 $C(b)$ 外切时，试用 a 表出 b 的值.

(4) 若 $C(a_1)$，$C(a_2)$，$C(a_3)$，$C(a_4)$ 逐个相外切，且 $a_1=\frac{1}{2}>a_2>a_3>a_4$，试求 a_4 的值. 〔177〕

椭　圆

249. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 上有两点 P,Q，联结点 $A(-a,0)$ 与 Q 的直线平行于 OP，且与 y 轴交于点 R. 求 $\frac{AQ\cdot AR}{OP^2}$ 的值. 〔167〕

250. (1) 作出 $x^2+4y^2=4x$ 的略图.

(2) 对于满足上述方程的点 (x,y)，求 $z=x^2-y^2$ 的最大值和最小值. 〔186〕

轨 迹 问 题

251. 当 a 变化时，求抛物线 $y=x^2-2ax+a$ 的顶点的轨

迹.〔174〕

252. 设 a 为常数，自坐标原点向圆 $(x-a)^2+(y-2)^2=a^2+1$ 引切线 $y=mx$，试把切点的坐标用 a 和 m 表示．再当 a 变化时，求切点的轨迹.〔208〕

253. 设 a，b 为常数且 $b\neq0$．试对 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$x=a+b\sin2\theta$，$y=u=b\cos2\theta$，$v=a-b\sin2\theta$，求 $x^2+y^2+u^2+v^2$ 的值．并且，当 θ 变化时，求点 (x,y) 的轨迹方程，把方程用 x，y，a，b 表示出来.〔70〕

254. 设 P 为圆心在 $(3,2)$ 半径为 1 的圆周上任一点．联结 P 与原点 O，并在 O 方向延长线上取一点 Q，使 $OP\cdot QO=6$．当 P 在圆周上变动时，求点 Q 的轨迹方程.〔86〕

不等式与平面区域

255. 试绘出由联立不等式 $2x+5y\leqslant10$，$2x+y\leqslant6$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 所表示的区域；并对此区域内的点 (x,y)，求 $4x+3y-3$ 的最大值.〔166〕

256. 试绘出由联立不等式 $x\geqslant0$，$0\leqslant y\leqslant3$，$x+y\leqslant4$，$2x+y\leqslant7$ 所表示的区域；并对此区域内的点 (x,y)，求 $3x+2y$ 的最大值.〔153〕

257. 二圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x-a)^2+y^2=4$ 相交，以它们的公共弦作直径做圆周 $C(a)$．当 a 在 $0<a<4$ 的范围内变动时，试描绘 $C(a)$ 上的点的存在区域.〔1〕

258. 把满足不等式 $x(x^2-|x|y^2+y^2-1)\geqslant0$ 的点 (x,y) 的存在区域描绘出来.〔35〕

259. 设 a 为正的常数．记号 $\min\{x,y\}$ 表示 x，y 两数中不大的那个数.

(1) 为使有除 $(0,0)$ 外的 (x,y) 满足不等式

$$\begin{cases}\min\{x, y\} \geqslant a(x+y), \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0,\end{cases} \qquad ①$$

求 a 的范围.

(2) 在 (1) 规定的 a 的范围内，设满足 ① 并且满足 $x+y \leqslant a$ 的点 (x, y) 的存在区域为 D，求 D 的面积.

〔78〕

八、数　　列

等差数列与等比数列

260. 已知等差数列 $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{1}{2}$, …，试求它的第20项 a_{20} 与开头20项之和 S_{20}.　〔140〕

261. 把63表成相继自然数的和，试求各种可能的表示法.　〔179〕

262. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比都是 d $(\neq 0)$，并且 $a_1=b_1$, $a_4=b_4$, $a_{10}=b_{10}$.

(1) 求 a_1 和 d 的值.

(2) b_{16} 是 $\{a_n\}$ 中的第几项?　〔83〕

263. 设 a 与 b 为正整数，又设首项为 a 公差为 b 的等差数列 $\{a_n\}$ 和首项为 b 公比为 a 的等比数列 $\{b_n\}$ 之间，成立不等式 $a_1<b_1<a_2<b_2<a_3$.

(1) 试求 a 的值.

(2) 对于某项 a_m，若有 b_n 与之满足 $a_m+1=b_n$ 的关系，试求 b 的值并导出 m 与 n 之间的关系.

(3) 试求 $\{a_n\}$ 中满足 (2) 的关系的首 k 项之和.　〔9〕

264. 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项分别为 $a_n=2^n$, $b_n=3n+2$，它们的公共项由小到大排成数列 $\{c_n\}$.

(1) 写出 $\{c_n\}$ 的开头五项.

(2) 证明 $\{c_n\}$ 是等比数列.　〔40〕

265. 设 $a>0$, $S_n=a+\frac{a}{1+a}+\frac{a}{(1+a)^2}+\cdots+\frac{a}{(1+a)^{n-1}}$,

试求满足 $|S_n-(1+a)|<\frac{1}{100}$ 的 n 的范围. 〔180〕

266. 设数列 $\{a_n\}$ 的首 n 项之和 S_n 可表成 $S_n=1+ra_n$ (r 为不等于 1 的常数).

(1) 试用 n 和 r 表出 a_n.

(2) 求适合 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$ 的 r 的范围. 〔216〕

267. 三角形的三边成等比数列，它的公比应满足什么条件？ 〔83〕

268. 在三边的长均为正整数的三角形中，给定一边的长为 n，而其它两边的长都小于 n，试问这种三角形共有多少个？这里，全等的三角形算作一个三角形. 〔1〕

其它各种数列

269. 设 $a_k=\frac{5k+4}{k(k+1)(k+2)}$ $(k=1,2,\cdots)$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_n$. 〔12〕

270. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 公比为 q 的等比数列，并且 a_1 与 q 都大于 1. 试证

$$\frac{1}{\sqrt{\log_2 a_1}+\sqrt{\log_2 a_2}}+\frac{1}{\sqrt{\log_2 a_2}+\sqrt{\log_2 a_3}}$$

$$+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\log_2 a_{n-1}}+\sqrt{\log_2 a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{\log_2 a_1}+\sqrt{\log_2 a_n}}.$$ 〔128〕

271. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的每一都是正的. 记

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ T_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

若对任意自然数 n，$S_n\leqslant n^2+n-1$，$T_n\geqslant\frac{1}{3}(4n^3-n)$.

试求此等差数列的首项和公差. 〔5〕

272. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，首 n 项之和 S_n 与通项 a_n 之间

满足 $a_n=\dfrac{2S_n^2}{2S_n-1}$ $(n\geqslant2)$. 试用 n 写出 a_n 的表达式.〔9〕

273. 求和数 $\sum\limits_{k=1}^{n}2^k k^2$ 以及 $\sum\limits_{k=1}^{n}2^k k$（参见题 93）. 〔23〕

274. 就数列 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{4}$, …而言, $\frac{8}{7}$ 是它的第几项?它的第800项是多少?〔11〕

275. 对于正整数 m, 它的个位数码用 $f(m)$ 表示, 又命

$$a_n=f(2^{n+1}-1)\quad(n=1,2,\cdots).$$

(1) 求 $f(2^{4^n})$. (2) 求 a_n. 〔226〕

276. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}$ $(n\geqslant1)$.

(1) 如置 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$, 求 b_{n+1} 与 b_n 之间的关系.

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式. 〔130〕

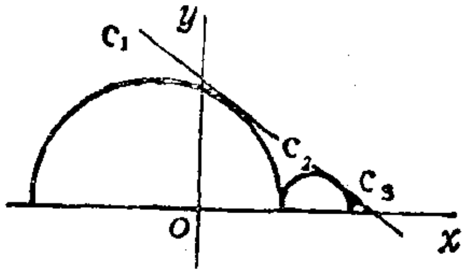
数 列 的 应 用

277. 假如数列 $\{t_n\}$ 满足下列关系:

$$t_n=3t_{n-2}-t_{n-1}\ (n\geqslant3),\ t_2=2,\ t_1=1.$$

那末对于任意自然数 m, 直线 $t_m x+t_{m+1}y=t_{m+2}$ 都通过一个与 m 无关的定点. 试证明之. 〔126〕

278. 图中直线 $y=-\frac{3}{4}x+1$ 与互切的半圆列 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 相切, 半圆的圆心为 $(a_k, 0)$, 半径为 r_k.



278.

(1) 把 a_k 用 r_k 表出.

(2) 把 r_k $(k\geqslant 2)$ 用 r_{k-1} 表出.

(3) 设 $a_1<0$，半圆 C_1 与 y 轴相切，求 r_1.

(4) 记半圆 C_k 的面积为 S_k，在(3)的假设下，求 $\sum_{k=1}^{n} S_k$. 〔21〕

279. 设 A 为直角三角形的直角顶点，$AB=c$，$AC=b$. 将斜边 BC $n+1$ 等分，从接近 B 的分点开始，分点依次是 P_1，P_2，…，P_n.

(1) 试把 AP_k^2 用 b,c,k,n 表出 $(1\leqslant k\leqslant n)$.

(2) 把 $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} AP_k^2$ 用 b,c,n 表出.

(3) 设 $BC=\sqrt{3}$，试把 $|S_n-1|$ 用 n 表出. 〔116〕

280. 在等腰三角形 $A_1A_2A_3$ 中，$A_1A_2=A_1A_3$，$\angle A_1=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$，$\angle A_2=\beta$. 在线段 A_3A_1 上取点 A_4，使 $\angle A_3A_2A_4=\alpha$，在线段 A_4A_2 上取点 A_5，使 $\angle A_4A_3A_5=\alpha$，如此等等，一般地对 $n=1,2,3,\cdots$，在线段 A_{n+2} 上取点 A_{n+3}，使 $\angle A_{n+2}A_{n+1}A_{n+3}=\alpha$，于是顺次得点 A_4，A_5，A_6，…，又命 $x_n=A_nA_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

(1) 求 α 和 β 之间的关系.

(2) 将 x_n 用 x_1 和 β 表出.

(3) 设 $\triangle A_4A_5A_6$ 的面积$=\frac{1}{64}$($\triangle A_1A_2A_3$ 的面积)，求 $\sin\alpha$ 之值. 同时，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛并求其和. 〔32〕

281. xy 平面上点 P 的坐标 x,y 都是整数的话，称点 P 为格子点. 对于平面上的任意区域 D，以 $N(D)$ 表示属于 D 的所有格子点的个数. 又设 n 是一个大于 1 的自然数.

(1) 设 A 是由曲线 $y=x^2$ 和两直线 $x=n$，$y=1$ 所围成的区域（包括边界在内），求 $N(A)$.

(2) 设B是由曲线$y=x^2$和两直线$x=1$，$y=n^2$所围成的第在一象限的区域（包括边界在内），求$N(A\cup B)$和$N(A\cap B)$.

(3) 利用以上结果求$N(B)$.

(4) 求$\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}]$，但$[\sqrt{k}]$表示实数$\sqrt{k}$的整数部分. 〔131〕

282. n (≥3)条直线将平面分割成多少块？试就下列三种情形加以回答.

(1) n条直线中没有两条平行，也没有三条相交于同一点.

(2) n条直线中恰有p (≥2)条互相平行，此外没有互相平行的，而且n条直线中没有三条相交于同一点.

(3) n条直线中恰有q (≥3)条交于同一点，除这个交点外，没有多于两条的直线交于同一点，而且也没有两条直线互相平行. 〔118〕

数学归纳法

283. 设m为正整数，记$\log_2 m$的整数部分为$F(m)$.

(1) 求$F(1)$，$F(2)$，$E(3)$，$F(4)$，$F(5)$.

(2) 对给定的正整数n，求使$F(m)=n$的m的个数.

(3) 用数学归纳法证明

$$F(1)+F(2)+\cdots+F(2^k)=(k-2)2^k+k+2. \quad 〔8〕$$

284. 设a为正整数，数列$\{u_n\}$定义如下：

$$u_1=2,\ u_2=a^2+2,\ u_n=au_{n-2}-u_{n-1}\quad (n\geqslant 3).$$

要使数列$\{u_n\}$的项中不出现4的倍数，问a应满足怎样的条件？ 〔15〕

285. 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是满足

$$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

的两个整数的无穷数列.

(1) 试推测用 a_n 和 b_n 来表达 $(1-\sqrt{2})^n$ 的表示式.

(2) 用数学归纳法证明你的推测.

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$. 〔122〕

286. 对自然数 n，设 $P_n=\sin^n\theta+\cos^n\theta$. 假定已知 $P_1=\cos\theta+\sin\theta$ 是一个有理数.

(1) 试证 $\sin\theta\cdot\cos\theta$ 是一个有理数.

(2) 用数学归纳法证明 P_n 都是有理数. 〔9〕

287. 函数 $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 定义如下：

$f_1(x)=4(x-x^2)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, $f_{n+1}(x)=f_n(f_1(x))$ $(n=1,2,\cdots)$. 设在〔0,1〕上使 $f_n(x)$ 取最大值的 x 的个数为 a_n，取最小值的 x 的个数为 b_n，试把 a_n 和 b_n 用 n 表出，并用数学归纳法证明. 〔185〕

288. 试对自然数 n 用数学归纳法证明：设 $f(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式，如对满足 $0\leqslant k\leqslant n$ 的整数 k，$f(k)$ 都取整数值，那末对任意的整数 m，$f(m)$ 也取整数值. 〔9〕

289. 对正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 有下列不等式：

$$a_1\cdot\frac{1}{a_1}\geqslant 1,\qquad (a_1+a_2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}\right)\geqslant 4,$$

$$(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)\geqslant 9.$$

(1) 据此类推，试写出关于 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的不等式.

(2) 证明 $(a_1+a_2)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}\right)\geqslant 4$.

(3) 用数学归纳法证明你在(1)的解答中的不等式. 〔26〕

二 项 式 定 理

290. 求 $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^8$ 的展开式中 x^4 与 $\frac{1}{x^4}$ 的系数. 〔140〕

291. 试证明：

(1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$；

(2) $\sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k$；

(3) $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^n$. 〔137〕

292. 对于给定的函数 $f(x)$，定义一个 n 次多项式 $f_n(x)$ 如下：

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad (n=1,2,\cdots).$$

(1) 当 $f(x)=1\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 时，求 $f_n(x)$.

(2) 当 $f(x)=x$ 时，试证 $f_n(x)=x$.

(3) 当 $f(x)=x^2$ 时，试证 $f_n(x)=\frac{n-1}{n}x^2+\frac{1}{n}\ (n\geqslant 2)$.

〔133〕

293. 设 n 是自然数. 要使 (1) n 位数 $111\cdots 1$；(2) $\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k 9^{n-k}$ 是 11 的倍数，问 n 应满足怎样的条件？ 〔6〕

294. 设 p 为素数. 试证：

(1) 二项式系数 C_p^r 能被 p 整除，这里整数 r 满足 $1\leqslant r\leqslant p-1$.

(2) 对正整数 n，n^p-n 能被 p 整除. 〔7〕

九、其它(几何、集合等等)

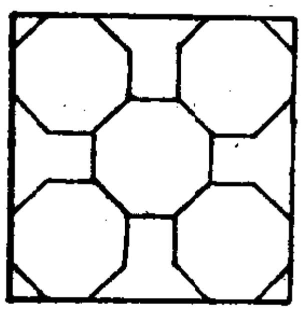
几　何

295. 在$\triangle ABC$的边BC上存在一点D，使线段AD能把$\triangle ABC$分成两个等腰三角形．设$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$中最小者为θ．

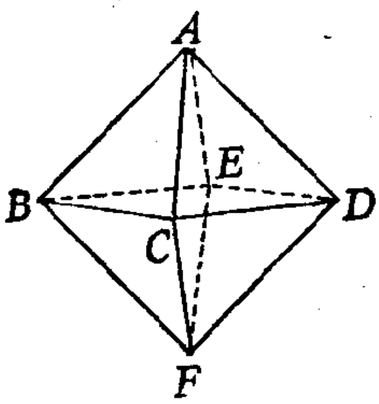
(1) 求θ的最大可能范围．

(2) 若$AB=AD=CD$，试用θ以及BC的边长a来表出$\triangle ABC$的面积．〔118〕

296. 在一边长为2的正方形内，装有五个全等的正八边形如下图所示．求一个正八边形的面积．〔121〕



296.



297.

297. 上图是一棱长为$3a$的正八面体$ABCDEF$．设P为AB的$1:2$内分点，Q与R分别是AC与AE的$2:1$内分点．

(1) 证明棱AD平行于过P,Q,R这三点的平面．

(2) 此平面对正八面体的截面是几边形？求其各边之长．〔124〕

298. 设$\triangle ABC$为直角三角形，$\angle A=90°$，$AB=c$，$CA=b$．今在边BC和CA上各自向外作正三角形$BA'C$和$CB'A$．又设M为边BC的中点．试把$\triangle MA'B'$的面积用b，c表示．〔189〕

299. 设 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 上各有内分比都是 $k:(1-k)$ $(0<k<1)$ 的内分点 D，E，F.

(1) 当 $k=\frac{1}{3}$ 时求 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 面积的比值.

(2) 试问 k 为何值时上述面积比为 $\frac{1}{2}$？ 〔156〕

集 合 等 等

300. 对集合 $S=\{14m+36n: m, n \text{ 为整数}\}$ 来说：

(1) 2是否在 S 中？

(2) 试证 S 与全体偶数之集相等. 〔151〕

301. 设 M 为所有满足 $|x-a|<a+\frac{1}{2}$ 的整数 x 的集合，N 为所有满足 $|x|<2a$ 的整数 x 的集合，试求属于 $M\cap N$ 的整数的总和，这里 a 是正整数. 〔179〕

302. 设有三个集合：$A=\{(x,y): x+ay=1\}$，$B=\{(x,y): ax+y=1\}$，$C=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$. 当 a 为何值时集合 $(A\cup B)\cap C$ 的元素为两个，当 a 为何值时集合 $(A\cup B)\cap C$ 的元素为三个？ 〔209〕

303. 已知两集合 $M=\{(x,y): x^2+2x+y^2\leqslant 0\}$，$N=\{(x,y): y\geqslant x+a\}$. 为使 $M\cap N=M$，试确定 a 的范围. 〔90〕

304. 设 a 与 b 为任意常数，X 为形如 $f(x)=a\cos x+b\sin x$ 的全体函数所成之集，F 为把平面上任意点 (a,b) 映为函数 $a\cos x+b\sin x$ 的映射.

(1) 证明 F 是全平面到 X 的一一对应.

(2) 证明：对属于 X 的任意函数 $f_0(x)$，$f_t(x)=f_0(x+t)$ 也属于 X，这里 t 为常数.

(3) 对属于 X 的一个固定的 $f_0(x)$，设 X_1 为 X 的子集

$\{f_0(x+t): t$ 为实数$\}$，在映射 F 之下，X_1 作为一个象，求其原象，并且图示之． 〔81〕

305. 对实数集 X 与 Y，若"X 中的任何元素都比 Y 中的任何元素大"，则写作"$X \succ Y$"．试证，对实数集 A, B, C, D，若有"$A \succ B$ 并且 $C \succ D$"，则"由非 $C \succ B$ 可推出 $A \succ D$"． 〔96〕

306. 设在集合 $\{(x,y): x,y$ 为实数$\}$ 上定义一种运算 $*$ 如下：

$$(x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1x_2, x_1y_2+x_2y_1).$$

(1) 若对任意 (x,y) 都有 $(x,y)*(x',y')=(x,y)$，试求 (x',y')．

(2) 对 $x\neq0$ 的 (x,y)，求适合 $(x,y)*(x',y')=(1,0)$ 的 (x',y')． 〔165〕

307. 甲、乙、丙、丁四人的血型各是 A、B、AB、O 四种血型中的一种，并且各不相同．现由各人自述其血型．甲说："我是A型．"乙说："我是O型．"丙说："我是AB型．"丁说："我不是AB型．"但是，其中三人说的是真话，一人说的是错话．请逐一分析，下列判断与上述事实是否矛盾：

(1) 甲说的是错话．

(2) 乙说的是错话．

(3) 丙说的是错话．

(4) 丁说的是错话． 〔177〕

解　　答

1． 将原式整理成 $(a-b-1)\sqrt{2}+(a^2+b^2-25)\sqrt{3}=0$，由于 $a-b-1$ 与 a^2+b^2-25 皆为有理数，从而得 $a-b-1=0$ 并且 $a^2+b^2-25=0$．解之，据 $a>0$，$b>0$ 得 $a=4$，$b=3$．

2． 命 $a+\sqrt{2}=p$，$b+\sqrt{2}=q$，代入题设整理得 $pq\{(p+q)^2-8\}=0$．由于 a 与 b 皆为有理数，$p\neq0$，$q\neq0$，从而 $(p+q)^2-8=0$，$p+q=\pm2\sqrt{2}$，即 $a+b+2\sqrt{2}=\pm2\sqrt{2}$．由于 a 与 b 皆为有理数，$a+b\neq4\sqrt{2}$，所以最后得 $a+b=0$．

3． $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$．由此以及题设可知 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^m$ 与 $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^m$ 是二次方程 $t^2-4t+1=0$ 的解．解之得 $t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}=(\sqrt{2\pm\sqrt{3}})^2=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{\pm2}$．从而对正整数 m，得 $m=2$；对负整数 m，得 $m=-2$．

4． 设 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$，则 $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{a}$，从而 $\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$．若 a 是有理数，则 $\sqrt{3}$ 也是有理数．命 $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$，此地 p 与 q 为互素的整数，则 $q^2=3p^2$，从而 q 可被 3 整除．命 $q=3r$，r 为整数，则 $p^2=3r^2$，从而又得出 p 也可被 3 整除，与 p 和 q 互素的假定矛盾．

5． $(x+y)(x+1)(y+1)$．

6． 原式 $=y^2+(x-1)y-(2x^2+5x+2)=y^2+(x-1)y$
$-(2x+1)(x+2)=\{y+(2x+1)\}\cdot\{y-(x+2)\}$
$=-(2x+y+1)(x-y+2)$．

7. 原式$=(x^3+1)(x^2+x+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

8. 原式$=(a^2)^3+(b^2)^3=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

$=(a^2+b^2)(a^2-\sqrt{3}ab+b^2)(a^2+\sqrt{3}ab+b^2)$.

9. 若分解式成立，则$ac=3$，从而$a\neq 0$，$c\neq 0$，并且方程 $3x^2+2x+1=0$ 有实数解 $x=-\frac{b}{a}$，$-\frac{d}{c}$，但此方程的判别式 $D=4-12<0$，矛盾.

10. $x^2+2x+1=(x+1)^2$，$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，所以最大公因式为 $x+1$，最小公倍式为 $(x+1)^2(x+2)$.

11. $2x^3+3x^2-2x-3=(x+1)(x-1)(2x+3)$，$x^3-2x^2+(1-a)x+a=(x-1)(x^2-x-a)$. 若最大公因式为$(x-1)(x+1)$，则$p(x)=x^2-x-a$应有因子$x+1$，从而由 $p(-1)=2-a=0$ 得 $a=2$；同样地若最大公因式为 $(x-1)(2x+3)$，则由

$p\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{4}-a=0$ 得 $a=\frac{15}{4}$.

12. $x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$，$2x^3+(a-2)x^2+ax-2a=(x-1)(2x^2+ax+2a)$. 命 $p(x)=2x^2+ax+2a$，由 $p(-2)=8\neq 0$ 可知 $x+2$ 不是 $p(x)$ 的因子；由 $p(-3)=18-a=0$ 得 $a=18$.

13. 由 $x^2-x+1=0$ 得 $x^2=x-1$，$x^2-x=-1$，从而 $x^3=x\cdot x^2=x(x-1)=-1$，所以原式$=1-1+\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

14. 由 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2$ 与 $x+y=1$ 得 $xy=-\frac{1}{2}$，

从而 $x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$

$=\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}\cdot\{(x^2+y^2)^2-2(xy)^2\}-(xy)^3(x+y)$

$=\left\{1^3-3\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\right\}\cdot\left\{2^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\}-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot 1=\frac{71}{8}$.

15. $P=Q+2x(x+3)=Q+2R$, 其中 $R=x(x+3)$;

$Q=(x-1)R-2(x+3)=(x-1)R-2r$, 其中 $r=x+3$;

$R=xr$,

所以 $$G=r=x+3.$$

由 $Q=(x-1)R-2r$ 与 $G=r$ 得 $2G=(x-1)R-Q$, 从而又由 $P=Q+2R$ 得 $4G=(x-1)(P-Q)-2Q$, 即

$$G=\frac{1}{4}(x-1)P-\frac{1}{4}(x+1)Q.$$

16. (1) $(x-1)P_n=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$
$=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=x^n-1$,

(2) $Q_n=x^{3n-1}+x^{3n-2}+\cdots+x^{2n+2}+x^{2n+1}+1$
$=x^{2n}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1-1)+1=x^{2n}P_n-x^{2n}+1$
$=x^{2n}P_n-(x^n+1)(x^n-1)=x^{2n}P_n-(x^n+1)(x-1)P_n$
$=\{x^{2n}-(x^n+1)(x-1)\}P_n=S_nP_n$,

其中 $S_n=x^{2n}-(x^n+1)(x-1)$ 是整式，所以 Q_n 能被 P_n 整除，除得商式为 S_n.

(3) 由 (1) 的结果，$(x-1)P_{3n}=x^{3n}-1=(x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)=0$ (题设)，所以当 $x\neq1$ 时 $P_{3n}=0$; 而当 $x=1$ 时直接由 P_{3n} 的定义可知它是 $3n$ 个 1 相加，所以此时 $P_{3n}=3n$.

17. $x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$
$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$,

所以 $$x^4=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)-1.$$

即，商式为 $x^2-\sqrt{2}x+1$, 余式为 -1.

18. 设 $f(x)=x^3+ax^2+6x-4$, 由余数定理根据题设得
$f(-2)=-8+4a-12-4=4a-24=0$, 从而得 $a=6$.

19. 因为 $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$, 所以记
$f(x)=2x^3+ax^2+bx+4$ 时，有 $f(2)=4a+2b+20=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}$

$+\frac{b}{2}+\frac{17}{4}=0$，从而解得 $a=-1$，$b=-8$.

20. 将 x^3-px^2+3x+q 用 $x+1$ 除两次，分别得余式 $-p+q-4=0$，$2p+6=0$，从而解得 $p=-3$，$q=1$.

21. 设 $f(x)$ 用 $x(x-2)$ 除的商为 $Q(x)$，余式为 $ax+b$，a 和 b 为待定常数，则由余数定理从题设得 $f(2)=2a+b=1$，$f(0)=b=-1$，从而解得 $a=1$，$b=-1$。所以余式为 $x-1$.

22. 与上题相类似地，得余式 $x+2$.

23. 设商为 $Q_n(x)$，由于 $x^2+ax-(a+1)=(x-1)(x+a+1)$，所以 $x^n=(x-1)(x+a+1)Q_n(x)+a_nx+b_n$. 以 $x=1$ 以及 $x=-a-1$ 代入，分别得 $a_n+b_n=1$ 并且 $-(a+1)a_n+b_n=(-a-1)^n$。从而解得 $a_n=\frac{1-(-a-1)^n}{a+2}$，$b_n=\frac{a+1+(-a-1)^n}{a+2}$。

24. 设 $f(x)$ 被 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除的商为 $Q(x)$，余式为 px^2+qx+r，则由题设 $pa^2+qa+r=a^2+b+c$，并且 $pb^2+qb+r=a+b^2+c$，并且 $pc^2+qc+r=a+b+c^2$。从而解得 $p=1$，$q=-1$，$r=a+b+c$. 所以余式为 $x^2-x+a+b+c$。

25. 由 $g(1)=0$ 得 $e=-d$，以此以及题设代入 $f(x)=a(x-2)^2\{h(x)\}^2+g(x)$，比较系数得 $a=ad^2$ 并且 $b=-2ad^2$ 并且 $c=-3ad^2$ 并且 $9=4ad^2+d$ 并且 $7=4ad^2-d$，解之得 $d=1$，$a=2$，$b=-4$，$c=-6$，$e=-1$.

26. 由题意 $f(x)=g(x)(x-l)$，$\{g(x)\}^2=f(x)(x-m)$，这里 l 和 m 为常数. 以后式代入前式 $\{g(x)\}^2=g(x)(x-l)(x-m)$，从而 $g(x)=x^2-4x+a=(x-l)(x-m)$，即 l 为二次方程 $x^2-4x+a=0$ 的解. 为使此解唯一，必有 $a=4$. 此时 $l=2$，从而 $f(x)=g(x)(x-2)=(x-2)^3$.

27. 由题设 $a=2k$，$b=3k$，$c=4k$（k 为常数），代入得 $\frac{a-b-c}{a+b+c}=-\frac{5}{9}$.

28. (1) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$； (2) ab；

(3) $\dfrac{-x^3+5x^2-x+y(5x^2+x+5)}{x^4+x^2+1}$， (4) x.

29. $S\left(5+\dfrac{1}{2}\right)=5$，$S\left(2+\dfrac{3}{4}\right)=2+1=3$. 所以原式 $=5-3=2$.

30. (1) 在 a 与 b 之间分母为 p 的分数为

$$\frac{pa}{p},\ \frac{pa+1}{p},\ \frac{pa+2}{p},\ \cdots,\ \frac{pb-1}{p},\ \frac{pb}{p}.$$

其中整数为

$$a,\ a+1,\ a+2,\ \cdots,\ b-1,\ b.$$

它们各自的项数分别为 $p(b-a)+1$，$b-a+1$；各自的和分别为

$$S_1=\frac{1}{2}(a+b)[p(b-a)+1],\quad S_2=\frac{1}{2}(a+b)(b-a+1).$$

$$\therefore\quad S=S_1-S_2=\frac{1}{2}(a^2-b^2)(p-1).$$

(2) S 为整数的充分且必要条件是，a^2-b^2 与 $p-1$ 两个数中至少有一个能被 2 整除. a^2-b^2 能被 2 整除表示 a^2 与 b^2 同时为奇数或者同时为偶数，即 a 与 b 同时为奇数或者同时为偶数，即 $(-1)^a=(-1)^b$；$p-1$ 能被 2 整除表示 p 为奇数，即 $(-1)^p=-1$.

31. 分母有理化得 $x=\sqrt{2}-1$，代入原式得其值为 0.

32. 原式 $=\dfrac{(x-y)\{(x+y)^2-xy\}}{xy}=30\sqrt{3}$.

33. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=2+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

这里 $0<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\dfrac{\sqrt{9}-1}{2}=1$，所以 $a=2$，$b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$a^2+\frac{1}{2}ab+b^2=5$.

34. (1) $\sqrt{3}-1$. (2) $-2\sqrt{2}$.

35. 原方程可化为 $(2x-1)(y-2)=6$，因 $2x-1$ 为奇数，所以有 $\begin{cases}2x-1=1,\\ y-2=6;\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}2x-1=3,\\ y-2=2.\end{cases}$ 从而 $x=1$，$y=8$；或 $x=2$，$y=4$.

36. 把第一个方程变形为 $(x-y)^2-(y-2z)^2=5$，从而 $(x-2z)(x-2y+2z)=5$. 以第二个方程代入得

$$(x-2z)(3x+4z-2)=5.$$

对整数 x，y，z，有四种可能：

$$\begin{cases}x-2z=1,\\ 3x+4z-2=5;\end{cases} \quad ① \qquad \begin{cases}x-2z=-1,\\ 3x+4z-2=-5;\end{cases} \quad ②$$

$$\begin{cases}x-2z=5,\\ 3x+4z-2=1;\end{cases} \quad ③ \qquad \begin{cases}x-2z=-5,\\ 3x+4z-2=-1.\end{cases} \quad ④$$

只有②存在整数解，所以它的解 $x=-1$，$y=2$，$z=0$ 就是原方程组的整数解.

37. 我们累计 $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$ 中因子 2 与 5 的个数，当然只要看 2 与 5 的倍数，并且达到三个 2 以及三个 5 就停止：2，4，5，10，15. 所以使 $n!$ 末三位为 000 的最小 n 是 15.

38. (1) 按定义，对 $n\in M$，总存在自然数 k 和 i，使 $n=k+(k+1)+\cdots+(k+i)=\frac{1}{2}(2k+i)(i+1)$. 因此欲使 $n=l(2m+1)$，只要

$$l(2m+1)=\frac{1}{2}(2k+i)(i+1). \quad ①$$

当 i 为奇数时，取 $l=\frac{i+1}{2}$，$m=k+\frac{i-1}{2}$；当 i 为偶数时，取

$l=k+\frac{i}{2}$，$m=\frac{i}{2}$，则 l 和 m 都是自然数，并且符合要求.

(2) 对任意自然数 l 和 m，只要能选取自然数 i 和 k 使①成立，就有 $l(2m+1)\in M$．当 $l\leqslant m$ 时，取 $i=2l-1, k=m-l-1$；当 $l>m$ 时，取 $i=2m$，$k=l-m$，就能使①成立.

(3) 从以上论证看出，凡不属于 M 的自然数，就是不含奇素数因子的自然数，从小到大，它们是

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{n-1},\ \cdots.$$

所以
$$a_n=2^{n-1}.$$

39. (1) 设 $a+b=7\cdot n$，其中 n 为整数，则 $b=7n-a$，代入 $aba=100\cdot a+10\cdot b+a$ 得 $aba=7(10n+13a)$，所以此时 aba 是 7 的倍数.

其中的偶数由 $a=2,4,6,8$ 给出，但 $a+b=7\cdot n$，从而相应地有 $b=5,3,1$ 或 $8,6$．所以所有这种偶数为 252, 434, 616, 686, 868．

(2) 若 $a+2b$ 是 7 的倍数，则 abb 是 7 的倍数．事实上，以 $a=7n-2b$ 代入 $abb=100\cdot a+10\cdot b+b$，得 $abb=7(100\cdot n-27\cdot b)$.

其中的奇数由 $b=1,3,5,7,9$ 给出，但 $a+2b=7\cdot n$，从而相应地有 $a=5,1$ 或 $8,4,7,3$．所以所有这种奇数为 511, 133, 833, 455，777，399．

40. (1) 设 M_{10} 的位数为 n，10^k 位上的数码为 a_k $(k=0,1,\cdots,n-1)$，则

$$M_{10}=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cdot 10^k=m_p+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(10^k-1).$$

其中 10^k-1 能被 $10-1=9$ 整除，所以 M_{10} 和 m_{10} 被 9 除有相同的余数.

(2) 设 M_p 的位数为 n，p^k 位上的数码为 a_k，则

$$M_p=\sum_{k=0}^{n-1}a_kp^k.$$

若 p 为偶数，则 $M_p=a_0+p\sum_{k=1}^{n-1}a_kp^{k-1}=a_0+2N$，$N$ 为整数；若 p 为奇数，则 $M_p=m_p+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(p^k-1)=m_p+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(p-1)N_k$ $=m_p+(p-1)\sum_{k=0}^{n-1}a_kN_k=m_p+2N'$，$N_k$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$，N' 是整数．所以所要证明的命题成立．

41．（1）因为 $n^2=(100-m)^2=100^2-200m+m^2$，所以 $n^2-m^2=100(100-2m)$，从而 n^2 与 m^2 的末二位数码相同．

（2）因为 $n^3=(100-m)^3=100^3-3\cdot100^2m+3\cdot100m^2-m^3$，所以 $n^3+m^3=100(100^2-300m+3m^2)$，即 n^3+m^3 是100的倍数，或者说 m^3 与 n^3 的末二位数互补．

42．（1）$\frac{n-2}{n}\pi$.

（2）在这种铺法下，或者若干个正 n 边形的顶角并成平角靠在另一个正 n 边形的一条边上；或者若干个正 n 边形的顶角并成周角．但前者也可包括在后者之中．设 k 个顶角并成一个周角，则

$$\frac{n-2}{n}\pi\cdot k=2\pi,\qquad 即\qquad k=2+\frac{4}{n-2}.$$

根据 $n\geqslant3$，k 为整数，推出 $n=3$，4，6．

43．（1）$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=3$，所以 $\alpha^2+\beta^2=-2$．

（2）以 $\alpha,\beta=-1\pm\sqrt{2}i$ 代入，$\alpha x+\beta y+3=(-1\pm\sqrt{2}i)x+(-1\mp\sqrt{2}i)y+3=0$，从而 $x+y=3$，$x=y$．解得 $x=y=\frac{3}{2}$．

44．$x^2-5x+8=0$．

45. (1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{9-2\sqrt{20}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}$，所以 $a=5$，$b=4$.

(2) 按题设，$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$ 是有理系数二次方程的解，则 $-\sqrt{5}-2$ 也当是它的解，从而由根与系数的关系得 $s=-(\sqrt{5}-2-\sqrt{5}-2)=4$，$t=(\sqrt{5}-2)(-\sqrt{5}-2)=-1$.

46. $p=-2$，$q=-2$.

47. 由题设 $a>0$，$f(x)=a(x-1)^2-1=ax^2-2ax+a-1$. 从而 $b=-2a$，$c=a-1$，又 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=2$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{a-1}{a}$，从而由 $\alpha^3+\beta^3=4$ 推得 $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4$，以上面式子代入得 $8-\dfrac{6(a-1)}{a}=4$，所以 $a=3$，并且 $b=-6$，$c=2$.

48. 原方程可化为 $x^2-\left(\log_2 b+\dfrac{1}{\log_2 a}\right)x+\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=0$，所以 $\left(x-\dfrac{1}{\log_2 a}\right)(x-\log_2 b)=0$，从而由题设得 $\dfrac{1}{\log_2 a}=2$，$\log_2 b=-1$，于是 $a=\sqrt{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$.

49. 原式可化为 $x^2+(y-3)x-3(y+2)+i(x+y-2)=0$，由于 x 与 y 皆为实数，所以 $x^2+(y-3)x-3(y+2)=x+y-2=0$，解之得 $x=6$，$y=-4$.

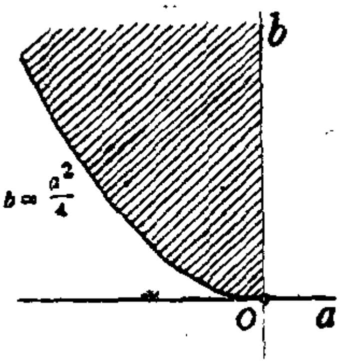
50. $a=1$，$x=2$.

51. (1) 由题设 $D=a^2-4b<0$，所以 $b>\dfrac{a^2}{4}$. 并且 $\alpha-\beta i$ 也当是一解，所以

$(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=-a$； ①　　$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=b$. ②

由①得 $2\alpha=-a$，据 $\alpha>0$ 得 $a<0$. 因此点 (a,b) 的存在范围同

时由不等式 $a<0$ 与 $b>\frac{a^2}{4}$ 所规定，这是右图斜线所示的区域，不包括边界.



51.

(2) $(\alpha+\beta i)^3=(\alpha^3-3\alpha\beta^2)+(3\alpha^2\beta-\beta^3)i$ 为实数的条件是 $3\alpha^2\beta-\beta^3=0$，$\because\ \beta\neq0$，$\therefore\ \beta^2=3\alpha^2$，于是由②及 $2\alpha=a$ 得 $b=\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+3\alpha^2=4\alpha^2=a^2$. 所以所求的式子是 $b=a^2$ $(a>0)$.

52. $a>4$; $a=4$, $x=1$.

53. $\frac{D}{4}=a^2-(a^3+5a^2+5a+2)=-(a+2)(a+1)^2\geqslant0$，所以 $a\leqslant-2$ 或 $a=-1$.

54. 设 $f(x)=ax^2-x+1$. 由题设 $D=1-4a\geqslant0$，所以 $f(2)=4a-1\leqslant0$，而 $f(0)=1>0$，因此 $f(x)=0$ 在 $0<x\leqslant2$ 中必有一解.

55. $x^2+ax+1=0$ 有二相异实根的条件*)是 $|a|>2$. 此时设二根为 α 与 β，则 $\alpha\beta=1$，从而二根皆负的条件是 $\alpha+\beta=-a<0$. 所以，命题 (A) 成立的条件是 $a>2$. 又，命题 (B) 成立的条件是 $1<a<3$,

据此，命题 (A) 成立而 (B) 不成立的条件是 $a\geqslant3$；命题 (A) 不成立而 (B) 成立的条件是 $1<a\leqslant2$. 所以所求 a 的范围为 $1<a\leqslant2$ 与 $a\geqslant3$.

56. 因为 $f(x)=x^2-2px+1$ 的二次项系数为正，所以由题设 $f(1)=1-2p+1<0$，由是得 $p>1$.

57. 由存在相异实根的条件得 $D=p^2-4>0$，又由根与系数的关系及其题设不等式得 $3\geqslant\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2$. 所以 $4<p^2\leqslant5$，即 $2<p\leqslant\sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5}\leqslant p<-2$.

---

*) 凡“条件”均指充分且必要条件.

58. (1) 由题设，方程 $f(x)+t(x-k)=0$ 对 $t=0$ 也应有实数解，所以方程 $f(x)=0$ 必有实数解.

(2) 据 $f(x)+t(x-k)=ax^2+(b+t)x+(c-tk)=0$ 对任何实数 t 有实数解得 $(b+t)^2-4a(c-tk)\geqslant 0$，即不等式

$$t^2+2t(b+2ak)+(b^2-4ac)\geqslant 0$$

对任意实数 t 都成立. 从而 $(b+2ak)^2-(b^2-4ac)\leqslant 0$. 整理之，得 $a^2\left(k^2+\frac{b}{a}k+\frac{c}{a}\right)\leqslant 0$. 设 $f(x)=0$ 的两个根为 α 与 β，则以 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 代入得 $(k-\alpha)(k-\beta)\leqslant 0$，所以 $\beta\leqslant k\leqslant \alpha$. 这就是所求的关系.

59. (1) 因为 $f(x)$ 的二次项系数为正，所以由题设 $f(-1)=1-a+b>0$，$f(1)=1+a+b<0$. 从而 a 与 b 应满足

$$a-1<b<-a-1. \qquad ①$$

(2) 当 ① 满足时，$\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$. 对固定的 a，当 b 取最大可能值 $-a-2$ 时 α 最小，此最小值为

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a+8}}{2}. \qquad ②$$

(3) 由①可知 $a<-a$，即 a 为负整数. 对此求②的最小值. 当 $a\leqslant -2$ 时，$\alpha=\frac{-a+\sqrt{(a+2)^2+4}}{2}$ 在 $a=-2$ 取最小值 $\alpha=\frac{2+\sqrt{4}}{2}=2$；当 $a=-1$ 时 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 而 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2$，因此当 $a=-1$ 时②最小. 由①，此时 $-2<b<0$，于是 $b=-1$. 所以，当 $a=b=-1$ 时，α 最小，此最小值为 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

60. 不妨设 $a>0$，否则方程两端同乘以 -1，则解与判别式均不变. 于是由题设 $a-b+c>0$，$c<0$，$a+b+c<0$，$b^2-4ac=5$. 可见 b 是奇数，并且由 $a-b+c>a+b+c$ 得 $b<0$，又由 $ac<0$ 得 $b^2<5$. 从而 $b=-1$，于是 $ac=-1$，考虑到 $a>0$，$c<0$，得 $a=1$，$c=-1$. 所以二次方程为 $x^2-x+1=0$，解之得 $\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，$\beta=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

61. (1) 根与系数之间有关系 $\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$. 根据 $\alpha+\beta=-p$，题设不等式可化为 $|\alpha|+|\beta|\leqslant1$. 两端各自平方得 $(\alpha+\beta)^2+2(|\alpha\beta|-\alpha\beta)\leqslant1$. 再根据根与系数的关系得
$p^2+2(|q|-q)\leqslant1$. 另一方面，由实根存在的条件得 $p^2-4q\geqslant0$. 所以联系起来得

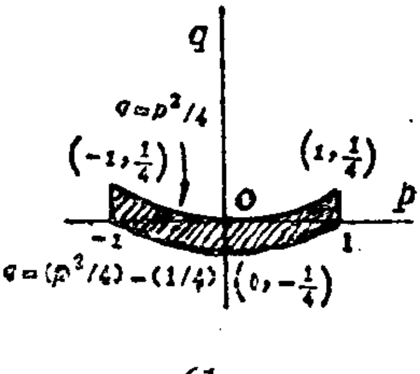
$$4q\leqslant p^2\leqslant1-2(|q|-q). \qquad ①$$

若 $q\geqslant0$，则①成为 $4q\leqslant p^2\leqslant1$，即 $0\leqslant q\leqslant\frac{p^2}{4}$，$|p|\leqslant1$. 若 $q<0$，则①成为 $p^2\leqslant1+4q$，即 $0\geqslant q\geqslant\frac{p^2-1}{4}$，$|p|\leqslant1$. 从而①可化为

$$\frac{p^2-1}{4}\leqslant q\leqslant\frac{p^2}{4},\qquad |p|\leqslant1. \qquad ②$$

这就是所求 p 与 q 之间的关系. 满足此关系的点 (p,q) 的存在区域如右图斜线所示，包括边界.

(2) 设 $k=p^2+2q$，研究 k 变化时曲线 $q=-\frac{p^2}{2}+\frac{k}{2}$ 与上述区域公共部分的变化情形，可以看出当且仅当 $\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{3}{2}$ 时有公共部分. 所以 k 的最小值为 $-\frac{1}{2}\left(当\ t=0,\ q=-\frac{1}{4}\ 时\ k=-\frac{1}{2}\right)$，



61.

k 的最大值为 $\frac{3}{2}$ $\left(当\ p=\pm1，q=\frac{1}{4}\ 时\ k=\frac{3}{2}\right)$.

62. (1) 由题设 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-4a$，$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=3a+1$，显然 $a\neq0$. 从而由正切函数的和角公式得 $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{4}{3}$. 再由倍角公式得 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{24}{7}$.

(2) 在题设之下 $0<\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<1$，$0<\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}<1$，因之 $f(x)=x^2+4ax+3a+1=0$ 的两个解皆在 0 与 1 之间. 据此可以写出

$\frac{1}{4}D^2=(2a)^2-(3a+1)\geqslant0$，$f(0)=3a+1>0$，$f(1)=7a+2>0$，

$0<\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-4a<2$. 解之得 $-\frac{2}{7}<a\leqslant-\frac{1}{4}$.

63. 当 $1+\cos\alpha=0$ 时由 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$ 得 $\alpha=\pi$. 此时原方程确有实数解. 当 $1+\cos\alpha\neq0$ 时，二次方程有实数解的条件是 $(1+\sin\alpha)^2-(1+\cos\alpha)^2\geqslant0$，从而 $(2+\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)\geqslant0$，但 $2+\sin\alpha+\cos\alpha>0$，所以由 $\sin\alpha-\cos\alpha\geqslant0$ 和 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$ 以及 $1+\cos\alpha\neq0$ 解得 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{5}{4}$ 并且 $\alpha\neq\pi$. 总起来说，

$\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{5\pi}{4}$.

64. 函数 $f(x)=x^2-\frac{3}{2}x+a$ 的值当 $x=\frac{3}{4}$ 时最小，所以当 $f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{9}{16}+a\leqslant0$，$f(1)=-\frac{1}{2}+a\geqslant0$ 同时满足时 $f(x)=0$ 的解都在 $-1\leqslant x\leqslant1$ 中. 从而 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{9}{16}$ 即为所求.

65. 命 $\sin x=t$，则 $\cos 2x=1-2t^2$，代入原方程整理得

$$f(t)=4t^2-4(a-1)t+4a-3=0. \qquad ①$$

原方程在 $0\leqslant x<2\pi$ 中有两个相异实根与①在 $-1<t<1$ 有一个实根是一回事，但重根只算一个根．因此有两种情形：

i） ①有两个相异实根，其一在 $-1<t<1$ 中．但 $f(-1)=8a-3$，$f(1)=5>0$，所以这种情形发生在 $8a-3<0$，即 $a<\dfrac{3}{8}$.

ii） ①在 $-1<t<1$ 有重根．根据有重根得到 $\dfrac{D}{4}=4(a-1)^2-4(4a-3)=0$，从而 $a=3\pm\sqrt{5}$．但重根应在 $-1<t<1$ 之中，于是 $a=3-\sqrt{5}$.

总之，所求 a 的变化范围为 $a<\dfrac{3}{8}$ 以及 $a=3-\sqrt{5}$.

66. (1) ①的判别式 $D=2b^2-4ac$，以余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ca\cos B$ 代入得 $D=2(a-c)^2-4ca\cos B$．但 b 边所对的角 B 为钝角，$-1<\cos B<0$，所以 $D>0$．于是①有两个相异实根.

(2) $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$，$\alpha+\beta=\dfrac{\sqrt{2}\,b}{a}>0$，由于 α 与 β 为实数，所以 $\alpha>0$，$\beta>0$.

(3) 当 $a=c$ 时，$b^2=2a^2-2a^2\cos B$，且 $\alpha\beta=1$，从而 $|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{2b^2}{a^2}-4=-4\cos B<4$，并由于 $\alpha\neq\beta$，所以 $0<|\alpha-\beta|<2$.

67. 由前面两个方程消去 a，得 $x^3-5x^2+4=0$，于是由 $(x-1)(x^2-4x-4)=0$ 解得 $x=1$，$2\pm2\sqrt{2}$．当 $x=1$ 时，由原三方程得 $a=2$，$b=1$．但 $x=2\pm\sqrt{2}$ 给出的 a 并非整数，所以 $a=2$，$b=1$.

68. 消去最高次项，得

$$x^2\sin\vartheta+2x+2\cos\vartheta=0. \qquad ①$$

公共解即含于此方程的解中．

当 $\sin\vartheta=0$ 时，$\vartheta=0,\pi$，此对的公共解相应为 $x=-1,1$.

当 $\sin\vartheta\neq0$ 时，由①得 $x=\dfrac{-1\pm(\sin\vartheta-\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}$. 如 $x=\dfrac{-1+\sin\vartheta-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$ 为公共解，代入第二个方程整理得 $(\sin\vartheta-\cos\vartheta)\cdot(\cos\vartheta+1)^2=0$，考虑到 ϑ 的范围得 $\vartheta=-\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{\pi}{4}$，此时的公共解相应地为 $x=\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$. 同样地以 $x=\dfrac{-1-\sin\vartheta+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$代入，得 $\sin\vartheta=\cos\vartheta$ 及 $\cos\vartheta=1$，其解都是已经得到的.

所以，$\vartheta_1=-\dfrac{3}{4}\pi$，$x_1=\sqrt{2}$；$\vartheta_2=1$，$x_2=1$.

69. 按题设，满足条件 $D=4(n^2-2m)\geqslant0$ 即 $2m\leqslant n^2$ 的 m 共 a_n 个. 当 n 为偶数时，这种 m 为 1，2，…，$\dfrac{n^2}{2}$，所以 $a_n=\dfrac{n^2}{2}$. 当 n 为奇数时，这种 m 为 1，2，…，$\dfrac{n^2-1}{2}$，所以 $a_n=\dfrac{n^2-1}{2}$.

对偶数N，不超过N的正奇数共 $\dfrac{N}{2}$ 个，所以

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{N}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)-\frac{N}{4}$$

$$=\frac{1}{6}N^3+\frac{1}{4}N^2-\frac{1}{6}N.$$

70. 原方程的解为

$$x=-(n+1)\pm\sqrt{n^2-4n+6}, \qquad ①$$

这里 $n^2-4n+6>(n-2)^2$，另方面，$n^2-4n+6<(n-1)^2$ 对 $2n>5$ 即 $n>\frac{5}{2}$ 时成立．所以当 $n\geqslant3$ 时 $n-2<\sqrt{n^2-4n+6}<n-1$，从而此时①的整数部分为 -3，$-2n$．于是所求方程为

$$x^2+(2n+3)x+6n=0.$$

当 $n=2$ 时，原方程为 $x^2+6x+7=0$，它的解为 $x=-3\pm\sqrt{2}\doteq-4.414$，$-1.586$，其整数部分为 -5，-2．于是所求方程为

$$x^2+7x+10=0.$$

当 $n=1$ 时，同样地得

$$x^2+5x+4=0.$$

71. (1) 设 x (>0) 为伸长的长度，则 $(a+x)^2=(b+x)^2+(c+x)^2$，从而

$$x=-(b+c-a)\pm\sqrt{2(a-b)(a-c)}\ . \qquad ①$$

由题设 $b+c>a$，所以要保证 $x>0$，双重符号不能取"$-$"号，至于取正号是否有意义，则要决定于 $b+c-a$ 是否小于 $\sqrt{2(a-b)(a-c)}$．其平方差为 $(b+c-a)^2-2(a-b)(a-c)=b^2+c^2-a^2$，所以当 $b^2+c^2<a^2$ 时取"$+$"号有意义．

又设 x (>0) 为缩短的长度，则由①得

$$x=(b+c-a)\pm\sqrt{2(a-b)(a-c)}\ . \qquad ②$$

并且双重符号中的"$-$"号仅当 $b^2+c^2>a^2$ 时有意义．若取"$+$"号，则 $x=c+\sqrt{2(a-b)(a-c)}-(a-b)\geqslant c$，也没有意义．

所以

$$x=\begin{cases}-(b+c-a)+\sqrt{2(a-b)(a-c)}, & 若\ b^2+c^2<a^2;\\ (b+c-a)-\sqrt{2(a-b)(a-c)}, & 若\ b^2+c^2>a^2.\end{cases}$$

(2) 若原三角形是钝角三角形，则 $a^2>b^2+c^2$，所以实际可能的是伸长，不可能缩短.

72. (1) $\frac{1}{2}$, -1. (2) 0, -8. (3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

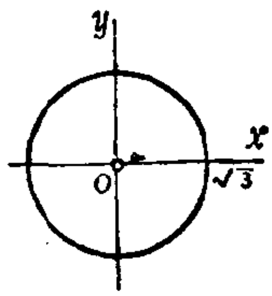
73. (1) $a+bi=\frac{x+i}{x-i}=\frac{x^2-1+2xi}{x^2+1}$,

$$\therefore\quad a=\frac{x^2-1}{x^2+1},\qquad b=\frac{2x}{x^2+1},\qquad \therefore\quad a^2+b^2=1.$$

(2) 于上述关系中置 $a=\frac{1}{3}$，则 $b=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$，再从

$\frac{1}{3}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 解出 $x^2=2$，所以 $x=\pm\sqrt{2}$.

74. $$z^2+\frac{9}{z^2}=\left\{x^2-y^2+\frac{9(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right\}+2xy\left\{1-\frac{9}{(x^2+y^2)^2}\right\}i.$$



74.

按题意，虚部应为 0，于是得

$$xy=0\quad 或者\quad x^2+y^2=3.$$

因此 P 的全体形成的图形是两坐标轴以及中心在原点半径为 $\sqrt{3}$ 的圆周，但要去掉原点（因为 $z\neq0$）.

75. $a=\sqrt{2}$, $b=2$.

76. $(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2}\,i)(x+\sqrt{2}\,i)$.

77. 由 $|z|=1$ 得 $x^2+y^2=1$，以此代入 $u=|z^2-z+1|$
$=|x^2-y^2-x+1+(2xyi-yi)|=\sqrt{(x^2-y^2-x+1)^2+y^2(2x-1)^2}$,
整理得

$$u=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|.$$

i）当 $2x-1\geqslant 0$ 即 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$u=2x-1$，从而由 $x^2+y^2=1$ 推出 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$. 所以此时 $0\leqslant u\leqslant 1$.

ii）当 $2x-1\leqslant 0$ 即 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$u=1-2x$，从而由 $x^2+y^2=1$ 推出 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. 所以此时 $0\leqslant u\leqslant 3$.

因此，当 $x=\frac{1}{2}$ 时 u 取最小值0；当 $x=-1$ 时 u 取最大值3.

78. $-1\pm i$，$1\pm i$.

79. 2，$3\pm 2i$.

80. (1) 如置 $g(x)=(x-a)(x-b)-r$，则 $g(a)=g(b)=-r<0$，因为 $g(x)$ 的二次项系数为正，抛物线 $y=g(x)$ 的开口向上，所以 $g(x)=0$ 有两个实根 α，β $(\alpha<\beta)$，且 $\alpha<a<b<\beta$.

(2) 以 $(\alpha-a)(\alpha-b)=r$ 代入 $f(\alpha)$ 得

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=r(\alpha-c)-(p+q+r)\alpha+ap+bq+cr\\&=p(a-\alpha)+q(b-\alpha)>0.\end{aligned}$$

(3) 同样地得 $f(\beta)<0$，由于三次方程 $f(x)=0$ 的最高次项的系数为正，所以它在 $x<\alpha$，$\alpha<x<\beta$，$x>\beta$ 中各有一个实数解，所以一共有三个实数解.

81. 原式 $=(x-1)(x+1)(x^2+2x+k)=0$，而方程 $x^2+2x+k=0$ 的判别式 $D=4(1-k)$，所以这个二次方程当 $k<1$ 时有两个实数解；当 $k=1$ 时重根算作一个解；当 $k>1$ 时无实数解. 当它的解与 $x=\pm 1$ 合起来时，注意当 $k=-3$ 时二次方程的解中也有 $x=1$，因此原方程解的个数如下表所列.

k 的范围	$k<-3$	-3	$-3<k<1$	$k=1$	$k>1$
实数解的个数	4	3	4	3	2

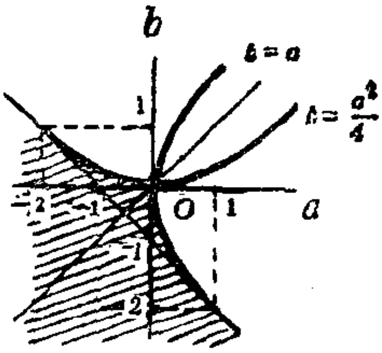
82. 由题设 $x^2+ax+b=0$ 与 $x^2+bx+a=0$ 各有两个相异的实数解，于是 $a^2-4b>0$，并且 $b^2-4a>0$. 从而

$$b<\frac{a^2}{4} \text{ 并且 } b^2>4a. \qquad ①$$

但是，两个二次方程有公共解 α 的情形尚需除去. 此 α 满足 $\alpha^2+a\alpha+b=0$ 并且 $\alpha^2+b\alpha+a=0$，两式相减得 $(a-b)(\alpha-1)=0$，即

$$a=b \quad \text{或者} \quad \alpha=1. \qquad ②$$

满足条件①但不满足条件②的点 (a,b) 的存在区域如右图斜影部分所示，但需除去边界以及两直线 $a=b$ 与 $a+b+1=0$. 这就是所求的区域.



82.

83. $y=a^4-4a^3-4a^2+17a+12=(a-3)(a^3-a^2-7a+4)$. 所以曲线与 x 轴的交点对应的参数 a 之值由

$$a=3 \text{ 或 } f(a)=a^3-a^2-7a+4=0$$

给出. 由 $f(-2)=-2, f(-1)=1, f(0)=-4, f(3)=-7, f(4)=16$ 推出方程 $f(a)=0$ 有三个实数解 α, β, γ：$-2<\alpha<-1, -1<\beta<0, 3<\gamma<4$. 所以要使曲线不与 x 轴相交，a 的变化范围应为：

$$a<\alpha \text{ 或 } \alpha<a<\beta \text{ 或 } \beta<a<3 \text{ 或 } 3<a<\gamma \text{ 或 } a>\gamma.$$

84. 令 $x^2=X$，则原方程化为 $2X^2+bX+8=0$，以 α^2 和 β^2 表示它的解（α, β 为整数，$\alpha^2\leqslant\beta^2$），则 $\alpha^2+\beta^2=-\frac{b}{2}$，$\alpha^2\beta^2=4$，由 $\alpha^2\beta^2=4$ 得 $\alpha^2=1$，$\beta^2=4$，所以 $b=-10, \alpha=\pm1$，$\beta=\pm2$.

85. 设三个解为 α, β 与 γ，并且 $\alpha\geqslant\beta>\gamma$. 则 $\alpha+\beta>\alpha+\gamma\geqslant\beta+\gamma$，并且这三个和不能为 0.

i）$\beta+\gamma>0$ 的情形：三和皆正，$\alpha+\gamma$ 是比例中项. 所以

$$\alpha+\beta+\gamma=a, \quad ① \qquad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=a, \quad ②$$

$$\alpha\beta\gamma=-(2a+1), \quad ③ \qquad (\alpha+\gamma)^2=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma). \quad ④$$

由①得 $\alpha+\gamma=a-\beta$，以此以及②代入④，得

$$2\beta=a-1. \quad ⑤$$

代入①和③得 $\alpha+\gamma=\frac{a+1}{2}$，$\alpha\gamma=-\frac{4a+2}{a-1}$. 以此及⑤代入②得

$\frac{a-1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}-\frac{4a+2}{a-1}=a$，从而 $a^3-5a^2-13a-7=0$，

$(a+1)^2(a-7)=0$，解得 $a=-1, a=7$，当 $a=-1$ 时 $\beta=-1 \not> 0$，与题设不符. 当 $a=7$ 时，得 $\beta=3$，$\alpha=5$，$\gamma=-1$，符合题设.

ii）$\beta+\gamma<0$ 的情形：若 $\alpha+\gamma<0$，则 $\alpha+\beta>0$ 是比例中项，上面④应用 $(\alpha+\beta)^2=(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)$ 代替；若 $\alpha+\gamma>0$，由于 $\alpha+\beta>0$，从而 $\beta+\gamma$ 是比例中项，④应用 $(\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$ 代替. 同样地分别都解得 $a=-1$，7. 但就 $\alpha+\gamma<0$ 的情形，$a=-1$ 给出 $\alpha+\beta=0$；$a=7$ 给出 $\gamma=3$，都与题设矛盾. 就 $\alpha+\gamma>0$ 的情形，$a=-1$ 给出 $\alpha=-1$，与题设矛盾；$a=7$ 给出 $\beta+\gamma=4$，与假定矛盾.

总起来说，原方程的解为 5，3，-1，并且 $a=7$.

86. $x=11$，$y=-6$，$z=-2$.

87. $x=\frac{4k^2-k-3}{10}$，$y=\frac{-k^2+4k-3}{10}$，

$$z=\frac{-k^2-k+12}{10}; \quad 1<k<3.$$

88. 以第二式代入第一式得 $7x^2+7mx+2m^2-5=0$. 判别式 $D=49m^2-28(2m^2-5)=0$，从而得 $m=\pm 2\sqrt{5}$.

89. 消去 x 得 $(a^2-3b-9)y=0$，消去 y 得 $(a^2-3b-9)x=0$. 所以当联立方程有非零解存在时，总可得

$$a^2-3b-9=0. \quad ①$$

反之，当①成立时，$(x,y)=\left(1,-\frac{a}{3}\right)$是满足第一个方程的，并且由$(b+3)-\frac{a^2}{3}=\frac{1}{3}(3b+9-a^2)=0$可知也满足第二个方程. 这说明此时联立方程有解$\left(1,-\frac{a}{3}\right)\neq(0,0)$.

因此，所求的充分且必要条件是①.

90. 把第一个方程化为 $(x-2z)(x-2y+2z)=5$. 由第二个方程解得 $y=1-x-z$ 代入上式得

$$(x-2z)(3x+4z-2)=5.$$

两个整数乘积为5，有$1\cdot5$、$5\cdot1$、$(-1)\cdot(-5)$、$(-5)\cdot(-1)$四种情形，分别讨论之，解得 $x=-1$, $y=2$, $z=0$.

91. 由第一、二式变形得 $x=\frac{z-1}{3}$, $y=\frac{2z+1}{3}$, 代入第三式，整理得

$$(a+4b+9c)z^2-(2a-4b)z+(a+b-9)=0.$$

这是关于 z 的恒等式，所以 $a+4b+9c=0$, $2a-4b=0$, $a+b-9=0$. 解之得 $a=6$, $b=3$, $c=-2$,

92. 当 $x=0,\pi,2\pi,3\pi$ 时 $\sin x=0$ 而 $\cos x\neq0$, 从而在这四个点上 $p(x)=0$, 所以 $p(x)\equiv0$. 同样地，当 $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}$ 时 $\cos x=0$ 而 $\sin x\neq0$, 从而 $q(x)\equiv0$.

93. 以 $f(x)$ 的表示式代入所满足的等式，整理得

$$ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c)=x^2.$$

比较此恒等式两端相反项的系数得 $a=1$, $4a+b=0$, $2a+2b+c=0$, 解之得 $a=1$, $b=-4$, $c=6$.

94. 令 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ $(a_0\neq0)$, 由题设

$$a_0(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)^n+\cdots+a_n=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)^2.$$

比较最高项的次数与系数，得 $n^2=2n$, $a_0^{n+1}=a_0^2$. 从而解得

$n=2$，$a_0=1$．因此 $f(x)=x^2+ax+b$．再代入原式，整理得

$$ax^2+a^2x+ab+b=0.$$

所以 $a=b=0$，于是 $f(x)=x^2$．

95. 由题设 $ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}=1$，并且从而 $(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=t^3-2t^2+t-abc=t(1-t)^2-abc$，即

$$t(1-t)^2=abc-(t-a)(t-b)(t-c).$$

令 $t=a$，b，c，得 $a(1-a)^2=b(1-b)^2=c(1-c)^2=abc$。

96. 由原式推出 $ab+bc+ca=abc$，$a+b+c=1$．所以 $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0$．因此 $a=1$ 或是 $b=1$ 或是 $c=1$．

97. (1) 例如对 $a=2$，$b=0$，有 $ab=0$ 但 $a^2+b^2=4\neq0$．

(2) 原式两端平方得 $a^2-2ab+b^2=a^2+2|ab|+b^2$．所以 $|ab|=-ab$，从而 $ab\leqslant0$，

(3) $(a^2+5b^2-3ab)-(b^2+ab-5)=(a-2b)^2+5>0$，所以前者较大。

98. 这种数组与 $27000=2^3 3^3 5^3$ 的约数一样多，共有 $(3+1)(4+1)(5+1)=64$ 个．

99. 由原方程变换得 $x+y+z=xyz$．$\because$ $x\geqslant y\geqslant z$，$\therefore$ $xyz=x+y+z\leqslant3x$，$\therefore$ $yz\leqslant3$．考虑三种可能：$y=1,z=1$；$y=2$，$z=1$；$y=3$，$z=1$．经验算 $y=2,z=1$ 适合，此时 $x=3$．

100. 设原方程的两个解为 α 与 β，则 $\alpha+\beta=-3$，$\alpha\beta=a+3$，$D=-3-4a>0$．

(1) 由 $\alpha+\beta=-3$ 可知 α，β 为一奇一偶．

(2) 由 $\alpha\beta=a+3$ 可知 a 为奇数，由 $-3-4a>0$ 可知 $a<-\frac{3}{4}$，所以 a 为负奇数．

(3) 根据 α 与 β 同号，从 $\alpha+\beta=-3$ 得两解 -1，-2，此

时 $a=-1$.

101. (1) 因为 $a^2=b^2+c^2$，所以这是直角三角形.

(2) 依题意 $mn(m^2-n^2)=2m(m+n)$. $\because\ m(m+n)\neq 0$，$\therefore\ n(m-n)=2$. 由于 $m-n>0$ 且 m 与 n 皆为正整数，得 $m-n=2$，$n=1$ 或 $m-n=1$，$n=2$. 从而相应得 $m=3$，$n=1$；$a=10$，$b=8$，$c=6$ 或 $m=3$，$n=2$；$a=13$，$b=5$，$c=12$.

102. (1) 当 $a\geqslant b\geqslant 0$ 时 $|a-b|+a+b=a-b+a+b=2a=2\max(a,b)$；当 $b\geqslant a\geqslant 0$ 时 $|a-b|+a+b=b-a+a+b=2b=2\max(a,b)$. 所以 $|a-b|+a+b=2\max(a,b)$.

(2) 由(1)，$||m|-|n||+|m|+|n|=2\max(|m|,|n|)$. 设 $\max(|m|,|n|)=k$，矩形的二边为 x，y，则 $x+y=4$，$xy=2k$. 消去 y 得 $x^2-4x+2k=0$. 由于 x 为实数，故 $D=4-2k\geqslant 0$，即 $k\leqslant 2$. 又由于 k 是正整数，故 $k=1,2$. 显然 $k=1$ 时 x 不存在. $k=2$ 给出 $x=y=2$. 于是 $\max(|m|,|n|)=2$. 满足此式的 m 与 n 之值为

$$\begin{cases}m=\pm 2,\\ n=\pm 2;\end{cases}\quad \begin{cases}m=\pm 2,\\ n=\pm 1;\end{cases}\quad \begin{cases}m=\pm 1,\\ n=\pm 2;\end{cases}$$

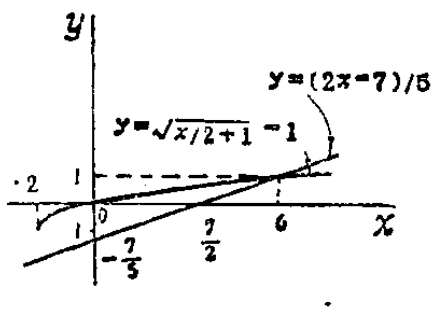
$$\begin{cases}m=\pm 2,\\ n=0;\end{cases}\quad \begin{cases}m=0,\\ n=\pm 2.\end{cases}$$

所求整数组 (m,n) 的数目为 $4\times 3+2\times 2=16$.

103. $(2x+3)^2>0$. 从而得 $x\neq -\frac{3}{2}$.

104. $x(x+40)(x-250)<0$. 从而得 $x<-40$ 或 $0<x<250$.

105. 画出函数 $y=\sqrt{\frac{1}{2}x+1}-1=\sqrt{\frac{1}{2}(x+2)}-1$ 与函数 $y=\frac{1}{5}(2x-7)=\frac{2}{5}\left(x-\frac{7}{2}\right)$的图象（见右图），交点的



105.

横坐标为 $x=6$. 所以 $-2\leqslant x<6$。

106. 原式的左端减右端可化为

$$(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2\geqslant 0.$$

等号仅对 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 的情形成立.

107. (1) $(a+b)(x+y)-2(ax+by)=(a-b)(y-x)\leqslant 0$.
从而

$$\frac{x-y}{a-b}+\frac{a-b}{x-y}-2=\frac{\{(x-y)-(a-b)\}^2}{(a-b)(x-y)}\geqslant 0.$$

(2) $$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}+3(ab+bc+ca)$$
$$\geqslant 3(ab+bc+ca)=3.$$

所以 $a+b+c$ 当 $a=b=c$ 时取最小值 $\sqrt{3}$.

108. 命 $$A=\frac{a}{b}-\frac{a-2c}{b-2d}=-\frac{2(ad-bc)}{b(b-2d)}.$$

由于 $ad-bc>0$, 所以当 $b-2d>0$ 时 $A<0$, 三数中最大者为 $\frac{a-2c}{b-2d}$; 当 $b-2d<0$ 时 $A>0$, 三数中最大者为 $\frac{a}{b}$.

109. $(x+y)^2+x^2y^2\leqslant a^2$, $\therefore$ $|x+y|\leqslant a$, $|xy|\leqslant a$. 如令 $x+y=X$, $xy=Y$, 此时 x 与 y 是二次方程 $t^2-Xt+Y=0$ 的两个解 $x,y=\frac{X\pm\sqrt{X^2-4Y}}{2}$, 所以

$$|x|,|y|\leqslant\frac{1}{2}(|X|+\sqrt{|X|^2+4|Y|})\leqslant\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4a}).$$

110. $x^2+y^2+z^2=a^2-2b$. 并且从而

$$S=(x^2+y^2+z^2)^3-(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$$
$$=(a^2-2b)^3-a^2(a^2-3b)^2=(3a^2-8b)b^2.$$

但 $$3a^2-8b=3(a^2-2b)-2b=3(x^2+y^2+z^2)-2(yz+zx+xy)$$
$$=(x^2+y^2+z^2)+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0.$$

所以 $S\geqslant 0$，原不等式成立.

令 $S=0$，得 $b=0$ 或 $3a^2-8b=0$. 而 $3a^2-8b=0$ 即 $x=y=z=0$，所以原不等式中的等号仅当 $x=y=z=0$ 或者 $yz+zx+xy=0$ 时成立.

111. $pf(x)+qf(y)-f(px+qy)$

$$=ap(1-p)x^2+cq(1-q)y^2-2apqxy+c(p+q-1)$$
$$=apq(x-y)^2.$$

这里已用 $p+q=1$ 代入. 由于 $p>0$, $q>0$，所以

当 $a>0$ 时 $pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy)$；

当 $a<0$ 时 $pf(x)+qf(y)\leqslant f(px+qy)$.

112. (1) 设 $\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}=x$，则

$$x=\left(\sqrt[4]{t}-\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)^2+2\geqslant 2\quad(t>0),$$

其中等号仅当 $t=1$ 时成立. 而

$$f(t)=x+\sqrt{x^2-1},\ g(t)=x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}},$$

当 $x\geqslant 2$ 时 $x+\sqrt{x^2-1}$ 是增函数，从而当 $x=2$ 时取最小值 $2+\sqrt{3}$，所以 $f(t)$ 当 $t=1$ 时取最小值 $2+\sqrt{3}$；$g(t)$ 当 $t=1$ 时取最大值 $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

(2) 由 $x>0$, $y>0$ 得 $a>0$, $c>0$，并且

$$c^2-a^2=(x+y)^2-(x^2+xy+y^2)=xy>0,$$

从而 $c>a$. 所以以 a, b, c 为三边长的三角形存在的条件为

$$c-a<b<c+a,$$

即 $$x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}<p\sqrt{xy}<x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2}.$$

两端同除以 $\sqrt{xy}$ 并置 $\dfrac{y}{x}=t\ (>0)$，得

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}<p<\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}.$$

由 (1) 的结果，为使上式对任意 $t>0$ 成立，p 的变化范围应当是 $2-\sqrt{3}<p<2+\sqrt{3}$.

113. 设 $x_1=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，$x_2=\dfrac{1}{2n\pi}$，

因 $x_1>0$，$x_2>0$，故 $f(x_1)=x_1+x_1\sqrt{x_1}\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=x_1(1+\sqrt{x_1})$，$f(x_2)=x_2+x_2\sqrt{x_2}\sin 2n\pi=x_2$.

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{x_1(1+\sqrt{x_1})}{x_2}=\frac{2n\pi}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}\right)$$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}}}{1+\dfrac{1}{4n}},$$

于是 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的大小关系决定于 A 的正负：

$$A=(4n)^2-\left(\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^2=16\left(n-\frac{\pi}{16}\right)^2-\frac{\pi(\pi+8)}{16}.$$

对 $n\geqslant 1$，$n-\dfrac{\pi}{16}>\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\pi(\pi+8)}{16}<\pi$，$\therefore\ A>4-\pi>0$. 因此

$$f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)>f\left(\frac{1}{2n\pi}\right).$$

114. 由 $u^2+v^2>0$ 推出 u 与 v 不能同时为 0，若 $v\neq 0$，

则原不等式成为 $A\left(\dfrac{u}{v}\right)^2+2B\left(\dfrac{u}{v}\right)+c>0$. 它对任意 u 及非 0 的

v 成立的条件是 $A>0$ 并且 $B^2-AC<0$. 若 $v=0$, 则原不等式成为 $Au^2>0$, 它对任意 u 成立的条件是 $A>0$. 所以所求条件为 $A>0$ 并且 $B^2-AC<0$.

115. (1) $f(x)=x^2-1-2x\operatorname{tg}\vartheta=(x-\operatorname{tg}\vartheta)^2-\operatorname{tg}^2\vartheta-1$, 可见函数 $f(x)$ 当 $-\operatorname{tg}\vartheta<x<0$ 时单调减小. 因此为使 $f(x)\leqslant 0$ 只需在区间端点有 $f(-\operatorname{tg}\vartheta)=3\operatorname{tg}^2\vartheta-1\leqslant 0$. 即$\left(\operatorname{tg}\vartheta+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\vartheta-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant 0$, 由于 $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\vartheta>0$, 所以 $0<\operatorname{tg}\vartheta\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$, 即 $0<\vartheta\leqslant\frac{\pi}{6}$.

(2) 依题设, 若 x 满足 $f(x)<0$, 则 $|x|\leqslant 2+\sqrt{3}$. 其逆否命题是, 若 $|x|>2+\sqrt{3}$, 则 $f(x)\geqslant 0$. 因为 $\operatorname{tg}\theta>0$, 二次方程$f(x)=0$ 有两个相异实根, 所以函数 $f(x)$ 当 $x>2+\sqrt{3}$ 时单调增加, 当 $x<-2-\sqrt{3}$ 时单调减小, 因此与 (1) 相仿地得出所求条件是

$$f(2+\sqrt{3})=6+4\sqrt{3}-2(2+\sqrt{3})\operatorname{tg}\theta\geqslant 0, \qquad ①$$

并且 $$f(-2-\sqrt{3})=6+4\sqrt{3}+2(2+\sqrt{3})\operatorname{tg}\theta\geqslant 0. \qquad ②$$

但②是常成立的, 所以由①得 $\operatorname{tg}\theta\leqslant\sqrt{3}$, 即 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$.

116. 题中不等式两端都是正的, 平方以后移项得

$(a^2-1)x-2\sqrt{xy}+(a^2-1)y\geqslant 0$. 除以 y 并令 $\sqrt{\frac{x}{y}}=t$ 得

$$(a^2-1)t^2-2t+(a^2-1)\geqslant 0.$$

此式应对任意正数 t 成立, 则 $a^2-1>0$ 并且 $1-(a^2-1)^2\leqslant 0$. 从而得 $a\geqslant\sqrt{2}$. 所以所求 a 的最小值为$\sqrt{2}$.

117. 通过点 (1, 2) 斜率为 m 的直线方程为

$y=m(x-1)+2=mx-m+2$. 此直线在抛物线的上方要求

$$mx-m+2>x^2-x+2 \text{ 即 } (x-1)(x-m)<0. \qquad ①$$

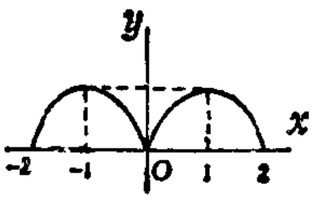
i) 当 $m>1$ 时 $1<x<m$.

ii) 当 $m=1$ 时 ① 不可能成立.

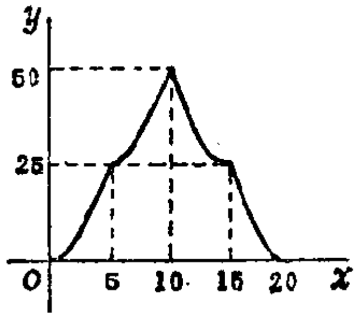
iii) 当 $m<1$ 时 $m<x<1$.

118. $$F(x)=\begin{cases} x(2-x), & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 2; \\ -x(2+x), & \text{若 } -2\leqslant x<0. \end{cases}$$

其图象如下.



118.



119.

119. $$y=\begin{cases} x^2, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 5; \\ (x-5)^2+25, & \text{若 } 5\leqslant x\leqslant 10; \\ (x-15)^2+25, & \text{若 } 10\leqslant x\leqslant 15; \\ (x-20)^2, & \text{若 } 15\leqslant x\leqslant 20. \end{cases}$$

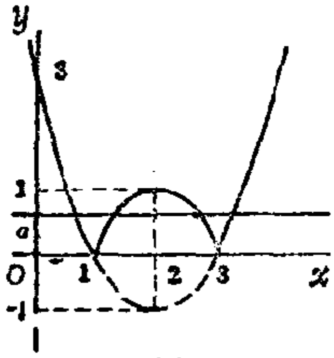
其图象如上.

120. 因为开口向下，所以 $a<0$；因为顶点的横坐标 $-\dfrac{b}{2a}$ 为正，而 $a<0$，所以 $b>0$；因为与 y 轴交点的纵坐标为负，所以 $c<0$；因为与 x 轴没有交点，所以 $b^2<4ac$.

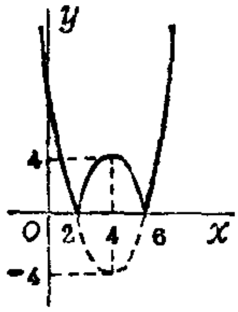
121. $y=|x^2-4x+3|=|(x-1)(x-3)|$

$$=\begin{cases} (x-1)(x-3), & \text{若 } x\leqslant 1 \text{ 或 } x\geqslant 3; \\ -(x-1)(x-3), & \text{若 } 1\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$$

其图象如下，直线 $y=a$ 与它有四个相异交点的条件为 $0<a<1$。



121.



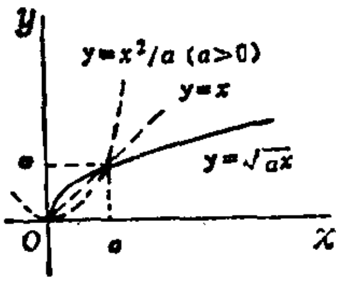
122.

122. (1) 其图象如上。

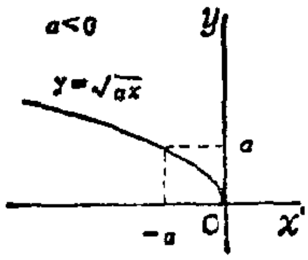
(2) 当 $2<x<4$ 时曲线的方程为 $y=-x^2+8x-12$，与 $y=2x+k$ 联立并关于 x 整理得 $x^2-6x+(k+12)=0$. 根据相切条件，$D=6^2-4(k+12)=0$，从而 $k=-3$. 此时切点坐标 $x=3$，确在 $2<x<4$ 之内，所以 $k=-3$ 即是所求.

(3) 所说的情形只能发生在 $y=2x+k$ 经过点 $(2,0)$ 时. 从而 $k=-4$. 以 $y=2x-4$ 与 $y=-x^2+8x-12(2<x<6)$ 联立得交点$(4,4)$；以 $y=2x-4$ 与 $y=x^2-8x+12(x>6)$ 联立得交点$(8,12)$.

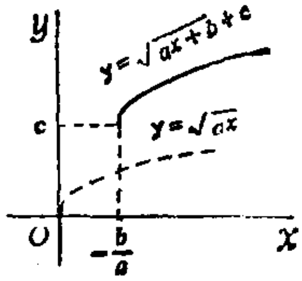
123. 由 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$，可知其图象为 $y=\sqrt{ax}$的图象沿 x 轴正向平移$-\frac{b}{a}$，沿 y 轴正向平移 c。而 $y=\sqrt{ax}$ 的图象则是抛物线 $y=\frac{x^2}{a}$ 的图象关于直线 $y=x$ 的对称图形中 $y\geqslant 0$ 的部分. 其图象如下.



123.(a)



(b)



(c)

124. $\because \quad \frac{2-x}{x-1}=-1+\frac{1}{x-1}, \quad \frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x},$

$\therefore \quad a=1, \quad b=-2.$

125. 原函数可化为 $y=(2a-1)+\frac{2a^2-a+1}{x-a}$. 设第一个空格该填 p，则平行移动后的函数为 $y=(2a-1)+\frac{2a^2-a+1}{x-p-a}-5$，原函数的反函数为 $y=a+\frac{2a^2-a+1}{x-2a+1}$. 既然二者应该一致，则 $2a-6=a$，$-p-a=-2a+1$，从而解得 $p=5$，$a=6$.

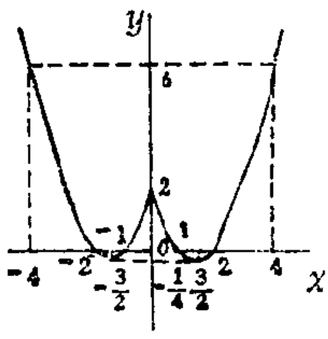
126. (1) 两方程联立，整理得 $(2ax-1)(x-1)(x-2)=0$. 所以所求 $x_1=1$，$x_2=2$，$y_1=1$，$y_2=\frac{1}{2}$.

(2) 命 $f(x)=ax^2-\left(3a+\frac{1}{2}\right)x+\left(2a+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{x}$，则 $f(x)=\frac{(2ax-1)(x-1)(x-2)}{2x}$. 对于 $1\leqslant x\leqslant 2$，$\frac{(x-1)(x-2)}{2x}\leqslant 0$. 故此时要使 $f(x)\geqslant 0$ 皆成立，即是要 $2ax-1\leqslant 0$ 对 $1\leqslant x\leqslant 2$ 皆成立. 从而 $a\leqslant\frac{1}{4}$.

127. (1) $(|x|-1)(|x|-2)=0$，$\therefore$ $x=\pm 1$，$x=\pm 2$.

(2) 图象如右.

(3) 参见图象，$f(\pm 4)=6$，$f(0)=2$，所以当 $-1\leqslant x\leqslant 4$ 时 y 的最大值为 $f(\pm 4)=6$. 又因 $y=f(x)=\left(|x|-\frac{3}{2}\right)_2-\frac{1}{4}$，所以 y 的最小值为 $f\left(\pm\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.



127.

128. $$f(x)=\begin{cases}x^2-3x, & 若\ x\geqslant 0;\\ -x^2-x, & 若\ x<0.\end{cases}$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-x(1+x)\geqslant 0$. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，它在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ 上 $\leqslant 0$ 并且单调下降，又在 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 上单调上升. 所以，若 $a<0$，则 $f(x)$ 在 $-1\leqslant x\leqslant a$ 的最小值为 $f(-1)=0$；若 $0\leqslant a<\frac{3}{2}$，则 $f(x)$ 的最小值为

$f(a)=a^2-3a$； 若 $a\geqslant\frac{3}{2}$，则 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$.

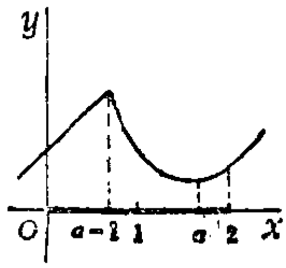
129. 设围成正三角形的一段之长为 x，则正三角形的边长为 $\frac{x}{3}$，正六边形边长为 $\frac{a-x}{6}$，从而面积之和为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2+6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a-x}{6}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{72}(5x^2-6ax+3a^2)$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{72}\left(x-\frac{3}{5}a\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{60}a^2,$$

当 $x=\frac{3}{5}a$ 时最小.

130. 函数 $y=f(x)$ 的图象如右. 注意 $a-1\geqslant 0$，而 $y=x^2-2ax+2a$ 的对称轴为 $x=a$.



130.

先看 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的最大值 $M(a)$. 由于 $a+1\geqslant 2$，所以若 $a-1\leqslant 2$，则 $M(a)=f(a-1)=-a^2+2a+1$；若 $a-1>2$，则 $M(a)=f(2)=2-(a^2-a-2)=-a^2+a+4$.

再看 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的最小值 $m(a)$. 首先函数 $f(x)$ 在 $x\geqslant a-1$ 的最小值为 $f(a)=-a^2+2a$. 而在 $0\leqslant x\leqslant a-1$ 的最小值为 $f(0)=-a^2+a+2$. 若 $a\leqslant 2$, 则 $f(a)\leqslant f(0)$, 所以 $m(a)=f(a)=-a^2+2a$; 若 $a>2$, 则 $f(a)<f(0)$, 所以 $m(a)=f(0)=-a^2+a+2$.

因此，总起来有

	最大值	最小值
$1\leqslant a\leqslant 2$	$-a^2+2a+1$	$-a^2+2a$
$2<a\leqslant 3$	$-a^2+2a+1$	$-a^2+a+2$
$a>3$	$-a^2+a+4$	$-a^2+a+2$

131. (1) $\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}a\cdot a\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

$\triangle ARQ$ 的面积 $=\frac{1}{2}\cdot 3x(a-2x)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}x(a-2x)$.

$\triangle CQP$ 的面积 $=\frac{1}{2}\cdot 2x(a-x)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}x(a-x)$.

$\triangle BPR$ 的面积 $=\frac{1}{2}\cdot x(a-3x)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}x(a-3x)$.

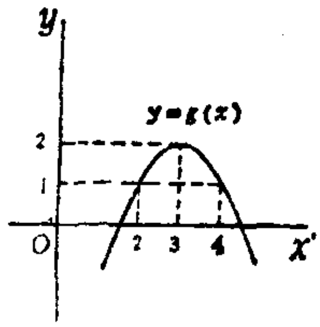
$\therefore$ $S=\triangle ABC$ 的面积 $-(\triangle ARQ$ 的面积 $+\triangle CQP$ 的面积 $+\triangle BPR$ 的面积$)=\frac{\sqrt{3}}{4}(11x^2-6ax+a^2)$,

(2) 当 $x=\frac{3}{11}a$ 时 S 取最小值 $\frac{\sqrt{3}}{22}a^2$.

132. $y=(x-p)^2-p^2+p-1$, 所以 $f(p)=-p^2+p-1$

$=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$，当 $0\leqslant p\leqslant 2$ 时，其最大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$；其最小值为 $f(2)=-3$.

133. (1) $f(x)=(x-p)^2+(q-p^2)$，从而 $f(x)\geqslant q-p^2$. 而 $g(x)=-(x-3)^2+2$，在 $x=3$ 时有最大值 2，对 $x\geqslant 4$ 有最大值1. 所以 $h(x)=g(f(x))$ 有最大值 1 的条件是 $q-p^2=4$；有最大值 2 的条件是 $q-p^2\leqslant 3$.



133.

(2) 当 $p=1, q=3$ 时，$f(x)=(x-1)^2+2\geqslant 2$，从而由右图可知要 $h(x)=-2$ 即要 $f(x)=5$ 也即要 $x=1\pm\sqrt{3}$. 又由图可知 $h(x)=a^2$ 有四个相异实数解的条件是 $1<a<2$.

134. $y=b\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a^2}{4b}$，当 $\frac{1}{x}=\frac{a}{2b}$ 时有最小值 $-\frac{a^2}{4b}$.

135. 距离 $l(x)$ 满足 $\{l(x)\}^2=\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=$

$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\right\}^2-\frac{7}{2}$. 令 $x+\frac{1}{x}=t$，

则 $\{l(x)\}^2=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}=f(t)$. 当 $x\geqslant 1$ 时 $t=x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，

且等号当 $x=1$ 时成立；又 $f(t)$ 当 $t\geqslant 2$ 时是单调增加函数，且 $f(2)=1\geqslant 0$，所以 $l(x)$ 当 $x=1$ 时取最小值 $l(1)=1$.

136. 设 $OD=x$cm，$OB=kx$ cm，$S_3=\triangle AOB$ 的面积，$S_4=\triangle COD$ 的面积，$S=S_1+S_2+S_3+S_4$，则由题设可得 $AO=\frac{36}{x}$ cm，$CO=\frac{16}{kx}$ cm，$S=26+S_3+S_4$，并且从而

$S_3+S_4=18k+\frac{8}{k}\geqslant 2\sqrt{18k\cdot\frac{8}{k}}=24$，等号仅当 $18k=\frac{8}{k}$ 时成立，即 S 最小时 $k^2=\frac{4}{9}$. $\because$ $k>0$， $\therefore$ $k=\frac{2}{3}$. 此时，

$$\frac{BO}{OD}=\frac{kx}{x}=k=\frac{2}{3}; \quad \frac{CO}{OA}=\frac{16}{kx}\cdot\frac{x}{36}=\frac{4}{9k}=\frac{2}{3}.$$

所以 $BO:OD=CO:OA$，即 $AD\parallel BC$.

137. (1) 由条件 $\frac{-2x+3}{2x-7}=x$ 解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 3.

(2) 依题意 $a=-\frac{1}{2}$，$b=3$，从而可以算出

$$\frac{f(x)-a}{f(x)-b}=\frac{2x+1}{16x-48}=\frac{1}{8}\frac{x-a}{x-b}$$

所以 $k=\frac{1}{8}$.

(3) 依定义 $a_n=f(a_{n-1})$，从而由 (2)

$$\frac{a_n+\frac{1}{2}}{a_n-3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{a_{n-1}+\frac{1}{2}}{a_{n-1}-3}=\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\cdot\frac{a_1+\frac{1}{2}}{a_1-3}.$$

所以

$$a_n=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}}{1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}},\quad \lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{1}{2}.$$

138. 原式对 a 整理得

$$(x-2)a^2-\{(b-1)x^2-(b+1)x\}a+x^3-y-(b-1)x^2+1=0.$$

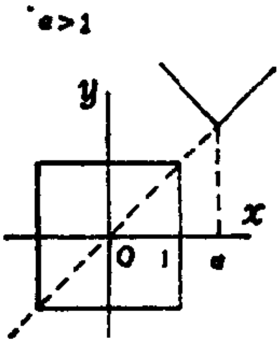
使此式对任何 a 均成立的常数 x, y, b 应满足

$x-2=0$，$(b-1)x^2-(b+1)x=0$，$x^8-y-(b-1)x^2+1=0$.
从而解得 $x=2$，$b=3$，$y=1$，

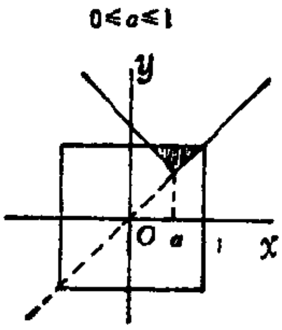
139．如图 (a—d)，分 $a>1$，$0\leqslant a\leqslant 1$，$-1\leqslant a<0$，$a<1$ 四种情形讨论．

$$S=\begin{cases}0, & 若\ a\geqslant 1;\\ (1-a)^2, & 若\ 0\leqslant a\leqslant 1;\\ 2-(1+a)^2, & 若\ -1\leqslant a\leqslant 0;\\ 2, & 若\ a\leqslant -1.\end{cases}$$

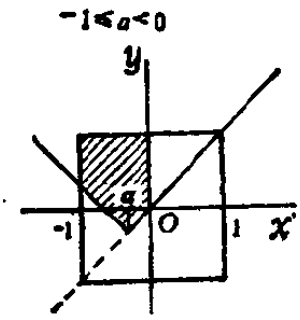
函数的图象如图 (e)．



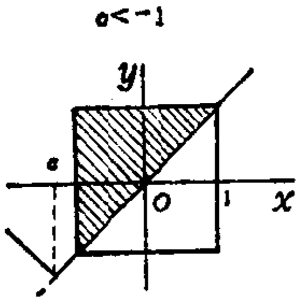
139．(a)



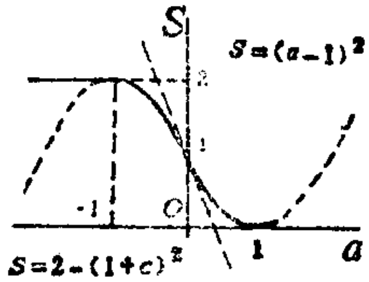
(b)



(c)



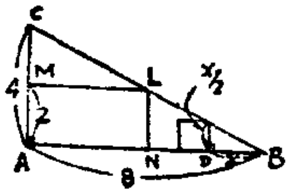
(d)



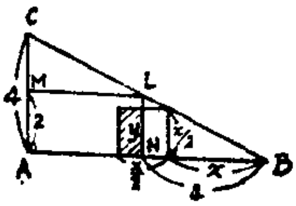
(e)

140．
$$y=\begin{cases}0, & 若\ 0\leqslant x\leqslant \frac{8}{3};\\ \frac{3}{4}x\left(x-\frac{8}{3}\right), & 若\ \frac{8}{3}\leqslant x\leqslant 4;\\ x, & 若\ 4\leqslant x\leqslant \frac{16}{3}\\ -2x+16. & 若\ \frac{16}{3}\leqslant x\leqslant 8.\end{cases}$$

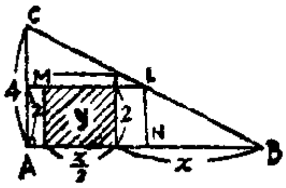
(见图 (a—d)). 图象如图 (e).



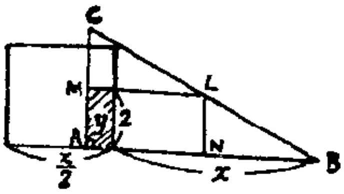
140. (a)



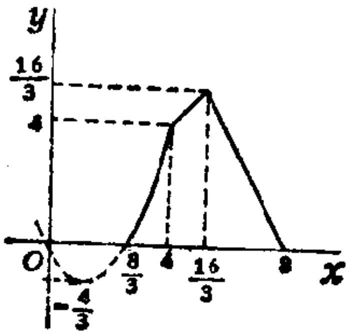
(b)



(c)



(d)



(e)

141. 于原式令 $x=\frac{1}{y}$ 得 $f(y)+2y^2f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{3y^3+4y^2-y+3}{1+y}$

由于对自变量的任意值成立，不妨把 y 仍写为 x，于是

$$\begin{cases}2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^2-x^2+4x+3}{x+1},\\ f(x)+2x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^3+4x^2-x+3}{x+1}.\end{cases}$$

消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得 $f(x)=x^2-3x+6-\frac{5}{x+1}$.

142. 设 $h>0$，则

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h+h\sqrt{h}\sin\frac{1}{h}}{h}=1+\sqrt{h}\sin\frac{1}{h},$$

$\therefore$ 此时 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\sqrt{h}\sin\dfrac{1}{h}\right)=1.$

设 $h<0$，则

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h-h\sqrt{h}\sin\dfrac{1}{h}}{h}=1-\sqrt{h}\sin\frac{1}{h},$$

$\therefore$ 此时 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(1-\sqrt{h}\sin\dfrac{1}{h}\right)=1.$

所以 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=1.$

143. 命 $\sin x=t$，则$y=f(t)=\dfrac{a}{2}t^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)t(-1\leqslant t\leqslant 1).$

由于 $f(1)=1$，故要求 y 有最大值 1 就是要求 $f(t)\leqslant 1$，即

$$(t-1)\left\{\frac{a}{2}(t^2+t)+1\right\}\leqslant 0\quad(-1\leqslant t\leqslant 1).$$

也即 $$a(t^2+t)\geqslant -2\quad(-1\leqslant t\leqslant 1). \qquad ①$$

对 $t=0$ 与 -1，① 总是成立的；对 $0<t\leqslant 1$，$t^2+t>0$ 的最大值是 2；对 $-1<t<0$，$t^2+t<0$ 的最小值是 $-\dfrac{1}{4}$，所以使①成立的 a 的范围是 $-1\leqslant a\leqslant 8$.

144. $f'(x)=1+\mathrm{tg}^2x$，$f''(x)=2(1+\mathrm{tg}^2x)\mathrm{tg}\,x$，所以命 $\mathrm{tg}\,\alpha=a$，$\mathrm{tg}\,\beta=b$，$\mathrm{tg}\,\gamma=c$ 时，由题设得

$$\begin{cases}a+b+c=0, & ①\\ a^2+b^2+c^2=6, & ②\\ a^3+b^3+c^3=0, & ③\end{cases}$$

将①与③代入等式

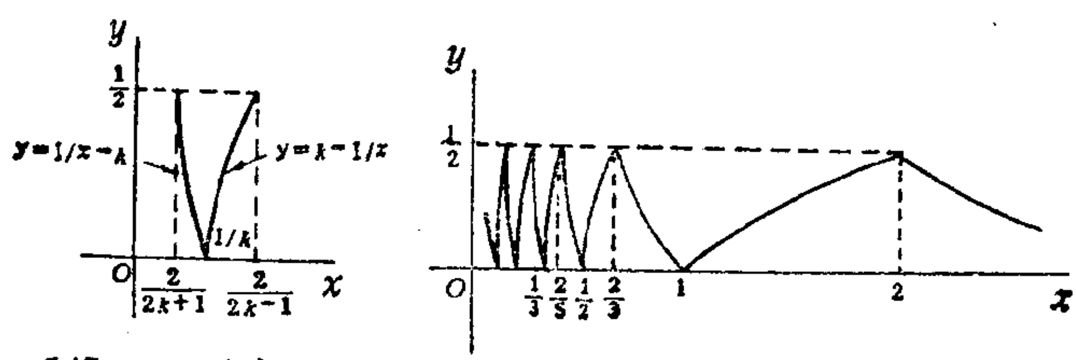
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

得 $abc=0$．于是 a，b，c 中至少有一个为 0．将 $a<b<c$ 和 ① 结合可知 $b=0$．以此代入 ① 和 ② 解得 $a=-\sqrt{3}$，$c=\sqrt{3}$．

所以 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$，$\beta=0$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$．

145．（1）$f(x)=0$ 即 $\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]$．此式右端是整数，且 $x>0$，所以得 $x=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$．反之，当 $x=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 时 $n<\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=n+\frac{1}{2}<n+1$，从而 $\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]=n=\frac{1}{x}$，$f(x)=0$．以所求集合为 $\left\{\frac{1}{n}:n=1,2,3,\cdots\right\}$．

（2）当 $x>2$ 时，$\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$，从而 $\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]=0$，所以此时 $f(x)=\frac{1}{x}$．当 $k\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{2}<k+1$ $(k=1,2,\cdots)$ 时 $\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]=k$，此时 $f(x)=\left|\frac{1}{x}-k\right|$．其图象见图 (a) $\left(f\left(\frac{2}{2k-1}\right)=\left|\frac{2k-1}{2}-k\right|.\right)$ 所求函数 $y=f(x)$ 的图象见图 (b)．



145．　(a)　　(b)

146. (1) 9；(2) 5；(3) $-\frac{1}{2}$.

147. $\log\frac{a-1}{a}$.

148. 原式$=\frac{2\log_2 3+\log_2 5+1}{\log_2 3+\log_2 5+1}=\frac{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}=\frac{ab+a+2b}{ab+a+b}$

149. $\because\ q=1-p=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$

$=p^2$,

$\therefore\ \frac{\log p}{\log q}=\frac{\log p}{\log p^2}=\frac{\log p}{2\log p}=\frac{1}{2}$.

150. $27^x+27^{-x}=(3^x)^3+(3^{-x})^3=(3^x+3^{-x})^3-3(3^x+3^{-x})$ $=4^3-3\cdot4=52$.

151. $\because\ 12.5=1000^{\frac{1}{a}}$, $0.0125=1000^{\frac{1}{b}}$, $\therefore\ 1000^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=$

$=\frac{12.5}{0.0125}=1000$, $\therefore\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$.

152. 命 $\log_s t=u$，则 $x=u+\frac{1}{u}$，但当 $u>0$ 时 $x\geqslant2$，当 $u<0$ 时 $x\leqslant-2$. 而

$$y=u^4+\frac{1}{u^4}-6\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)+10=\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)^2-6\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)+8.$$

又 $x^2=\left(u+\frac{1}{u}\right)^2=u^2+\frac{1}{u^2}+2$，代入上式得

$y=(x^2-2)^2-6(x^2-2)+8=(x^2-4)(x^2-6)\ (|x|\geqslant 2)$.

153. (1) 真数 $4-|x-2|>0$，所以 $-2<x<6$，还有 $y>0$ $\left(y\neq\frac{1}{2}\right)$. 变换原方程得 $(4-|x-2|)^2=2y$，即 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+10+4|x-2|$.

当 $-2<x\leqslant 2$ 时，$y=\frac{1}{2}x^2-2x+10+4(x-2)=\frac{1}{2}(x+2)^2$，且由 $y\neq\frac{1}{2}$ 得 $x\neq-1$.

当 $2<x<6$ 时，$y=\frac{1}{2}x^2-2x+10-4(x-2)=\frac{1}{2}(x-6)^2$，且由 $y\neq\frac{1}{2}$ 得 $x\neq 5$.

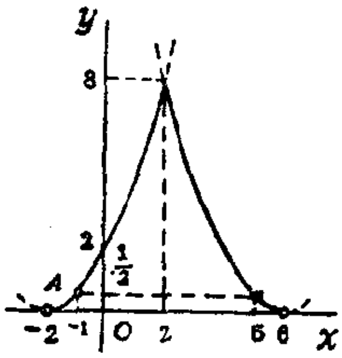
总起来说，C 的图形如右图实线所示（注意$A\overline{\in}C$）.

(2) 不论 a 的值如何，直线 l 总过定点 $A\left(-1,\frac{1}{2}\right)$，且其斜率为 a. 假定 l 与 C 相切，将两方程联立得 $x^2-2(a-2)x-(2a-3)=0$，$\frac{D}{4}=(a-2)^2+(2a-3)=(a-1)^2=0$，这对应 $a=1$.

假定 l 通过点 $(-2,0)$，则 $a=\frac{1}{2}$.

假定 l 通过点 $(2,8)$，则 $a=\frac{5}{2}$.

假定 l 通过点 $(6,0)$，则 $a=-\frac{1}{14}$.



153.

考察当 a 变动时 l 图象的变动情形，可知 l 与 C 正好有一个公共点的 a 的范围为 $-\frac{1}{14}<a<0$，$0<a\leqslant\frac{1}{2}$，$a=1$，$a=\frac{5}{2}$.

154. 化作 $(x-4)^2=x-2$ $(x>4)$，解得 $x=6$.

155. 两端取对数得 $(\lg x)^2=3+2\lg x$ $(x>0)$，从而解得 $\lg x=3$ 或 -1，所以 $x=1000$ 或 $\frac{1}{10}$.

156. 化作 $(\log_2 3x-3)(\log_2 3x+1)=0$，解得 $x=\frac{8}{3}$，$\frac{1}{6}$.

157. 化作 $(2+x)(3-x)=4-2x$ $(-2<x<2)$，解得

$$x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}.$$

158. 第一式化作 $(x+y)^2=4xy$，从而 $x=y$. 第二式化作 $(x+y)^3=27xy$，以 $x=y$ 代入并注意真数恒正，得 $x=y=\frac{27}{8}$.

159. 由第二式得 $xy=2^5=32$ 及 $x>0$，$y>0$. 于是 $(x+y)^2-2xy=x^2+y^2=80$，从而 $(x+y)^2=144$，$x+y=12$. 因此 x，y 是方程 $t^2-12t+32=0$ 的解：

$$x=8,\quad y=4 \quad 或 \quad x=4,\quad y=8.$$

160. $x=y=z=1$ 显然满足. 今设取 x, y, $z\neq1$，取对数得

$$xyz\log x=2\log y,\quad (xyz+1)\log y=3\log z,$$

$(xyz+2)\log z=4\log x$. 三式相乘，由 $\log x\log y\log z\neq0$ 得 $xyz(xyz+1)\cdot(xyz+2)=24$. 令 $xyz=u$，则

$$u^3+3u^2+2u-24=0，所以 (u-2)\cdot(u^2+5u+12)=0.$$

$$\because\ u^2+5u+12>0,\quad \therefore\ u=2,\quad 即\ xyz=2.$$

从而 $x=y=z=\sqrt[3]{2}$. 答：$x=y=z=1$ 或 $x=y=z=\sqrt[3]{2}$.

161. 由 $xy=490$ 得 $\lg x+\lg y=2\lg 7+1$. 令 $\lg x-\lg 7=X$，$\lg y-\lg 7=Y$，则 $X\cdot Y=-\frac{143}{4}$，$X+Y=1$. 于是解

$t^2-t-\frac{143}{4}=0$ 得（不妨设 $x\geqslant y$）$X=\frac{13}{2}$ 即 $\lg x-\lg 7=\frac{13}{2}$，$\lg x=\lg 7+6.5$. $\because$ $2\lg 2<\lg 7<\lg 10$，$\therefore$ $0.602<\lg 7<1$,

即 $7.102<\lg x<7.5$，于是得 x 的整数部分是 8 位数.

162. $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

163. 原式变形为 $4\leqslant\log_2 a<5$，即 $16\leqslant a<32$. 所以这种正整数的个数为 $32-16=16$.

164. 解后一不等式得 $3<x<7$. 由 $l-a<x<l+a$ 能推出此不等式中整数 l 的可能值为：$4\leqslant l\leqslant 6$. 然后由 $3\leqslant l-a$ 并且 $l+a\leqslant 7$ 对 $l=4,5,6$ 分别得出 $a\leqslant 1$，$a\leqslant 2$，$a\leqslant 1$.

165. 由第一式得 $2^{-x}>2^3$，从而 $x<-3$. 由第二式得 $0<x+4<9$，从而 $-4<x<5$. 同时满足为 $-4<x<-3$.

166. 命右端减左端为 A，则

$$A=p_1\{\lg(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\lg x_1\}+p_2\{\lg(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\lg x_2\}+\cdots+p_n\{\lg(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\lg x_n\}.$$

因为 $x_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，所以

$$\lg(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\lg x_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

加以诸 p_i 皆正，所以 A 为正，从而原不等式成立.

167. $y=(\log_3 x)^2+2\log_3 x+2=(\log_3 x+1)^2+1$

当 $\log_3 x+1=0$ 即 $x=\frac{1}{3}$ 时取最小值 1.

168. $\because$ $xy=x(6-x)=9-(x-3)^2$，且 $a>0$，$\therefore$ $\log_a\sqrt{xy}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}\log_a 9=\frac{b}{2}$.

169. 原式 $=\log_2\cos^2 x$，在 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 0$ 以及 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 上分别单调，而 $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}>\cos\frac{\pi}{4}$，所以当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时 $\log_2\cos^2 x$ 取最小值 $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=-1$.

170. $\pm\frac{1}{2}$.

171. 52.

172. $\pm\frac{7}{5}$.

173. $-\frac{8}{3}$.

174. $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

175. $\frac{4}{3}$; $\frac{81+64\sqrt{2}}{63}$.

176. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

177. $\frac{13}{27}$.

178. $-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

178. 简写 $\sin\theta=s$, $\cos\theta=c$, 则

$$u_6=s^6+c^6=(s^2+c^2)^3-3s^2c^2(s^2+c^2)=1-3s^2c^2.$$

$$u_8=s^8+c^8=(s^6+c^6)(s^2+c^2)-s^2c^2(s^4+c^4)=u_6-u_4s^2c^2,$$

但 $u_4=s^4+c^4=(s^2+c^2)^2-2s^2c^2=1-2s^2c^2$,

$\therefore$ $u_8=1-3s^2c^2-(1-2s^2c^2)s^2c^2=1-4s^2c^2+2s^4c^4$.

$$u_{10}=(s^8+c^8)(s^2+c^2)-s^2c^2(s^6+c^6)=u_8-u_6s^2c^2$$
$$=1-4s^2c^2+2s^4c^4-(1-3s^2c^2)s^2c^2=1-5s^2c^2+5s^4c^4.$$

$\therefore$ $6u_{10}-15u_8+10u_6=6(1-5s^2c^2+5s^4c^4)$
$$-15(1-4s^2c^2+2s^4c^4)+10(1-3s^2c^2)=1.$$

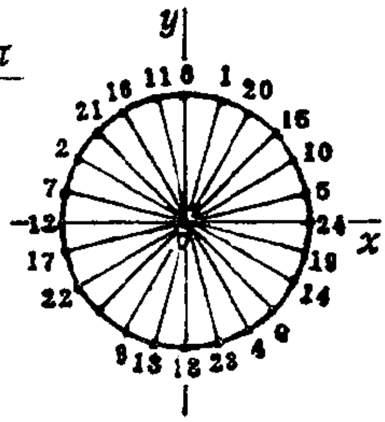
180. 由 $\sin x+\cos x=-1$, $\sin^2x+\cos^2x=1$ 得 $(\sin x, \cos x)=(0,-1)$ 或 $(-1,0)$, 所以 $\sin^n x+\cos^n x=(-1)^n$.

181. 0.

182. $\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{3\sqrt{130}}{130}$, $\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{11\sqrt{130}}{130}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{11}$.

183. 设 $\cos x+\cos y=t$，此式及 $\sin x+\sin y=1$ 两端同时平方后相加得 $2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=t^2-1$，即 $2\cos(x-y)=t^2-1$．由 $-1\leqslant\cos(x-y)\leqslant 1$ 得 $t^2\leqslant 3$，所以 $-\sqrt{3}\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$．

184. (1) 在单位圆中，表示角 $\frac{5m\pi}{12}$ $(m=1,2,3,\cdots)$ 的矢径 OP_m 在圆周上的端点 P_m 如图所示是圆周的 24 等分点，于是这矢径的全体就与表示角 $\frac{n\pi}{12}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 的矢径的全体一致，所以 $A=B$.



184

(2) $A\cap C=B\cap C$，$\cos\theta>\frac{1}{2}$ 相当于 $2k\pi-\frac{\pi}{3}<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{3}$ (k 为整数)，所以属于 $B\cap C$ 的数共有 $\cos 0$，$\cos\frac{\pi}{12}$，$\cos\frac{2\pi}{12}$，$\cos\frac{3\pi}{12}$ 四个，计算之，为 1，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

185. 以 $x=0,\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}$ 代入恒等式，从所得式中解得 $a+b=1$，$\sin c=0$，$\cos c=-\frac{a}{b}$．于是由 $\sin^2 c+\cos^2 c=1$ 得 $a^2=b^2$，但 $a=-b$ 与 $a+b=1$ 不符，而 $a=b$ 给出 $a=b=\frac{1}{2}$，$c=(2n+1)\pi$（n 为整数）．代入原恒等式验证适合．

186. $\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi,\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\right)$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ \cdots)$.

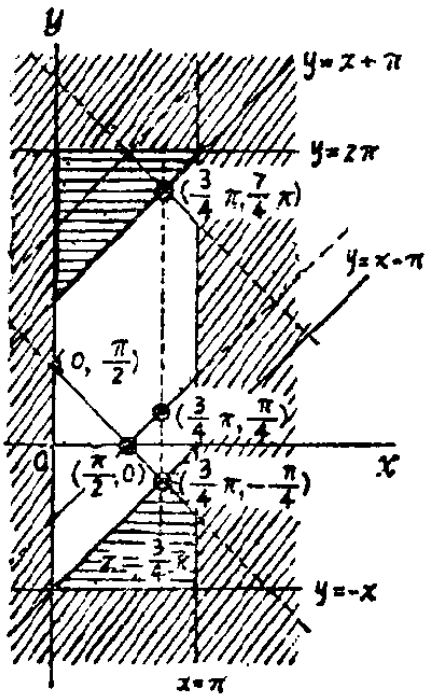
187. (1) 从出发经过时间 t，A 与 B 的坐标相应为 $A(vt,0)$，$B(vt\cos\theta, vt\sin\theta-2)$. 按题设，其间距离 $S(t)$ 的最小值为 1.

$$\{S(t)\}^2=v^2t^2(\cos\theta-1)^2+(vt\sin\theta-2)^2$$
$$=2v^2(1-\cos\theta)t^2-4v\sin\theta\cdot t+4.$$

若 $\cos\theta=1$，$\{S(t)\}^2$ 的最小值为 4 与题设不符. 若 $\cos\theta<1$，则 $\{S(t)\}^2$ 当 $t=\dfrac{\sin\theta}{v(1-\cos\theta)}$ 时为最小，从而命

$$\left\{S\left(\frac{\sin\theta}{v(1-\cos\theta)}\right)\right\}^2=1.\ \text{解得}\ \theta=\frac{\pi}{3}.$$

(2) 距离最短是在 $t=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{v\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{v}$ 时. 此时 A B 的坐标为 $A(\sqrt{3},0)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.



193.

188. $\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$.

189. $\dfrac{\pi}{2}$.

190. $-\dfrac{\pi}{3}$.

191. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

192. $-\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{6}$.

193. (1) $y=2n\pi\pm\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$（$n$ 为整数）.

(2) 当 $n=0$ 时 $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ 或 $y=x-\dfrac{\pi}{2}$；

当 $n=1$ 时 $y=\frac{5}{2}\pi-x$ 或 $y=x+\frac{3}{2}\pi$, 其余 n 值不符题设. 图象如上.

(3) 由图象得 $x=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3}{4}\pi$.

194. 命 $\cos\theta=x$, 原方程化为 $f(x)=x^2+x-(\alpha+1)=0$. 可分几种情形来讨论.

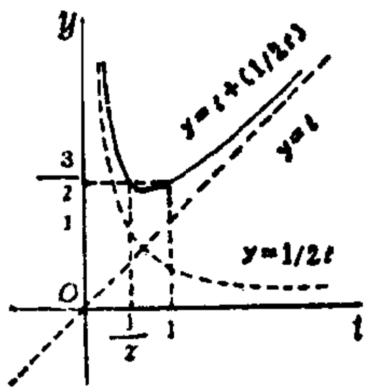
i) 在 $-1<x<1$ 有唯一解的情形. 这要求 $f(1)f(-1)<0$, 从而得 $-1<\alpha<1$.

ii) $x=1$ 或 $x=-1$ 是其解的情形. 这要求 $f(1)f(-1)=0$, 即 $\alpha=1$ 或 $\alpha=-1$.

iii) 在 $-1<x<1$ 有两个解的情形. 这要求 $D=1+4(\alpha+1)\geqslant 0$, $f(1)>0$, $f(-1)>0$ 同时满足, 从而得 $-\frac{5}{4}\leqslant\alpha<-1$.

总起来得 $-\frac{5}{4}\leqslant\alpha\leqslant 1$.

195. 命 $\sin\theta=t$, 则 $y=t+\frac{1}{2t}\ \left(\frac{1}{2}<t\leqslant 1\right)$. 由右图可见当 $t=1$ 时 y 取最大值 $\frac{3}{2}$, 此时 $\theta=90°$. 又由不等式 $t+\frac{1}{2t}\geqslant 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{2t}}=\sqrt{2}$ 可见当 $t=\frac{1}{2t}$ 时 y 取最小值, 此时 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta=45°$.



195.

196. $y=\sin^4x+(1-\sin^2x)^2=2\left(\sin^2x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$.

$\because\ 0\leqslant\sin^2x\leqslant 1$, $\therefore\ \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$.

197. 如命 $\sin x=t\ (-1\leqslant t\leqslant 1)$，则 $y=-t^2-at+b+1$

$$=-\left(t+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+b+1.$$

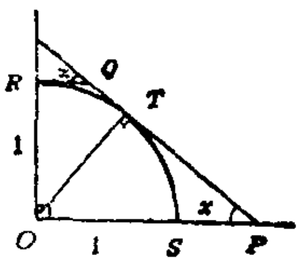
先设 $0<a\leqslant 2$，此时 最大值$=\frac{a^2}{4}+b+1=0$， 最小值$=-a+b=-4$. 解之得 $a=2$，$b=-2$，并且当 $t=-1$ 即 $x=\frac{3\pi}{2}$ 时 y 取最大值 0，当 $t=1$ 即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时 y 取最小值 -4.

再设 $a>2$，此时 最大值$=a+b=0$，最小值$=-a+b=-4$. 同时满足此两式的 $a>2$ 是不存在的.

总起来，$a=2, b=-2$，并且当 $x=\frac{3\pi}{2}$ 时 y 最大，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时 y 最小.

198. 设 PQ 与圆切于点 T，则 $OT\perp PQ$，由 $\angle OPT=x$，$OT=1$ 得 $OP=\frac{1}{\sin x}$. 还有，RQ 是圆的切线，从而 $RQ\,\mathrm{tg}\,x=OP\,\mathrm{tg}\,x-1$， $RQ=OP-\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$. 所以

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right).$$



198.

199. 由原式得 $\cos(A-B)+\sin(A+B)=2$. 因为 $0\leqslant\cos(A-B)\leqslant 1$， $0<\sin(A+B)\leqslant 1$. 所以 $\cos(A-B)=1$，$\sin(A+B)=1$. 于是 $A=B=45°$，即 $\triangle ABC$ 是以 C 为直角的等腰直角三角形.

200. 由原式，$2c=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)a=(\sqrt{3}+1)b$，

$\therefore$ $a:b:c=\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$. 又设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则

$$2S=h_1a=h_2b=h_3c,$$

所以 $h_1:h_2:h_3=bc:ca:ab=(\sqrt{6}+\sqrt{2}):(\sqrt{3}+1):2$.

201. 由条件 $14\theta=2m\pi$（m为自然数）与 $\pi<2\theta<\frac{3}{2}\pi$ 解得 $\theta=\frac{4}{7}\pi$ 或 $\frac{5}{7}\pi$.

202. 利用余弦定理化简两端为 $2ac\sin B$，$2ab\sin C$，再利用正弦定理.

203. $\sin B+\sin C=\frac{m}{l}$. 又 $S=\frac{1}{2}l^2\sin B\sin C$，从

$(\sin B+\sin C)^2=\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C=1+2\sin B\sin C$

得 $\sin B\sin C=\frac{m^2-l^2}{2l^2}$，所以 $S=\frac{m^2-l^2}{4}$.

204. (1) 利用余弦定理.

(2) 比较各端：

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$=\frac{1}{4abc}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqslant 0,$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$=\frac{1}{2abc}\{a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)\}>0.$$

205. 根据 $a:b:c=5:6:7$，由余弦定理求得 $\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，从而由正弦定理得 $c=\frac{4\sqrt{6}}{5}r$，$b=\frac{24\sqrt{6}}{35}r$，所以面积

$$S=\left(\frac{24}{35}\right)^2\sqrt{6}\,r^2.$$

206. $BH=h\operatorname{tg}\alpha,\angle B=90^\circ-\alpha,CH=h\operatorname{tg}\beta,AC=h\sec\beta.$

“……由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\sin(\alpha+\beta)$

$$=\frac{h\operatorname{tg}\alpha+h\operatorname{tg}\beta}{h\sec\beta}\sin(90^\circ-\alpha)=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cos\alpha\cos\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.”$$

207. $\frac{13}{27}$.

208. $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$

$=\frac{9}{8}(\sin\theta+\cos\theta)$，而由 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\sin 2\theta=\frac{3}{4}$，得 $\sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又根据 $\sin 2\theta<0$，$\cos 2\theta>0$ 得 $n\pi<\theta+\frac{\pi}{4}<n\pi+\frac{\pi}{4}$，可见 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的符号正负都有可能. 所以 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=\pm\frac{9\sqrt{3}}{16}$.

209. $\sin 2x=\frac{3}{5}$，又 $\cos 2x=\frac{4}{5}$，$\cos y=-\frac{7}{5\sqrt{2}}$. $\sin y=\frac{1}{5\sqrt{2}}$，从而 $\sin(2x-y)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

210. 由原式解得 $\sin\alpha=\frac{3}{4}$，由 $\sin\alpha>\operatorname{tg}\alpha$ 可推出 $\cos\alpha<0$，从而 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

211. 原式 $=(1+\sqrt{2}\cos\alpha)\sin x+(1+\sqrt{2}\sin\alpha)\cos x=0$，所以由 $1+\sqrt{2}\cos\alpha=0$，$1+\sqrt{2}\sin\alpha=0$ 解得 $\alpha=\frac{5}{4}\pi$.

212. (1) 对左端用加法定理.

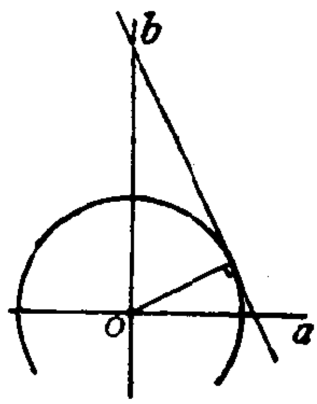
(2) $\sin(2n+1)x\cdot\sin x$.

(3) 原式 $=\sin^2(n+1)x-\sin^2 nx-\{\sin^2 nx-\sin^2(n-1)x\}$
$=\sin(2n+1)x\sin x-\sin(2n-1)x\sin x=2\sin^2 x\cos 2nx$.

213. $y=2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时 y 取最小值 $-\frac{3}{2}$.

214. $f(\theta)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，其中

$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



214.

(1) 由题设 $\frac{a+b}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$\sqrt{a^2+b^2}=10$，从而解得 $a=-1, b=3$ 或 $a=3$，$b=-1$.

(2) 由题设 $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{b}{2}=1$，$l=-\sqrt{a^2+b^2}$. 先在 $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{b}{2}=1$ 的条件下讨论 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 的取值范围，亦即使圆周 $a^2+b^2=r^2$ 与那条直线有公共点的这些 r 值. 由于原点到该直线的距离为 1，所以 $r\geqslant 1$，因此得 $l\leqslant -1$.

215. (1) $y=\frac{3-\mathrm{tg}^2\theta}{1-3\,\mathrm{tg}^2\theta}=\frac{3-x^2}{1-3x^2}\ \left(x\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

(2) 从而 $(3y-1)x^2=y-3$，显然 $y\neq\frac{1}{3}$，于是 $x^2=\frac{y-3}{3y-1}$.

但 x 是实数，因此 $\frac{y-3}{3y-1}\geqslant 0$，所以 $y<\frac{1}{3}$ 或 $y\geqslant 3$.

216. $\sin^2 x-\sin^2 y=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)-\frac{1}{2}(1-\cos 2y)\geqslant 0$,

$\sin(y+x)\cdot\sin(y-x)\leqslant 0$，则

$$\begin{cases}2n\pi\leqslant x+y\leqslant(2n+1)\pi;\\(2m-1)\pi\leqslant y-x\leqslant 2m\pi;\end{cases}\quad 或者\quad\begin{cases}(2n-1)\pi\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,\\2m\pi\leqslant y-x\leqslant(2m+1)\pi,\end{cases}$$

这里 n，m 独立地各自取 0，±1，±2，…. 整理之，得

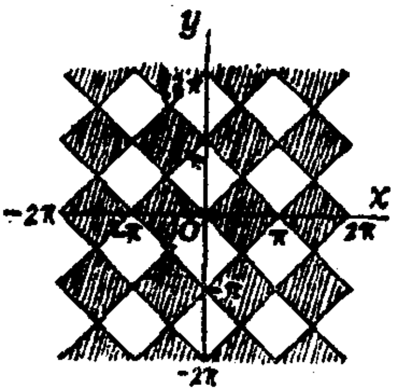
$$\begin{cases}2n\pi-x\leqslant y\leqslant(2n+1)\pi-x,\\(2m-1)\pi+x\leqslant y\leqslant 2m\pi+x;\end{cases}$$

或

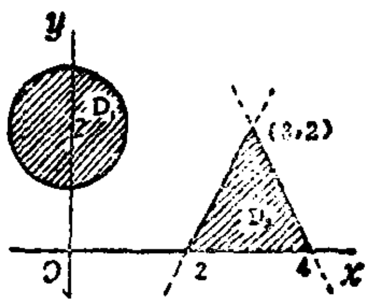
$$\begin{cases}(2n-1)\pi-x\leqslant y\leqslant 2n\pi-x,\\2m\pi+x\leqslant y\leqslant(2m+1)\pi+x,\end{cases}$$

$$(n,m=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

其图如下左图斜线部分所示，包括边界.



216.



217.

217. 参见上右图. 对固定的 $(x_1,y_1)\in D_1$,

$$z=2(y_1-y_2)+3(x_2-x_1)+1, \qquad ①$$

当 y_2 最小、x_2 最大时 z 最大，即当 $(x_2,y_2)=(4,0)$ 时 z 最大．另一方面，命 $x_1=r\cos\theta$，$y_1=r\sin\theta+2$，这里 $0\leqslant r\leqslant 1$，得

$$z=r(2\sin\theta-3\cos\theta)+17=\sqrt{13}r\sin(\theta-\alpha)+17,$$

这里 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{2}$，从而当 $\sin(\theta-\alpha)=1$ 且 $r=1$ 时 z 取最大值 $\sqrt{13}+17$．

又对固定的 $(x_1,y_1)\in D_1$，当 y_2 最大，x_2 最小时 z 最小．从而 z 的最小值当在 $y_2=2x_2-4\quad(2\leqslant x_2\leqslant 3)$ 上求．代入①得

$$z=2y_1-3x_1-x_2+9.$$

从而当 $x_2=3$ 时 z 最小．与上面同样地

$$z=r(2\sin\theta-3\cos\theta)+10=\sqrt{13}r\sin(\theta-\alpha)+10,$$

当 $\sin(\theta-\alpha)=-1$ 且 $r=1$ 时 z 取最小值 $10-\sqrt{13}$.

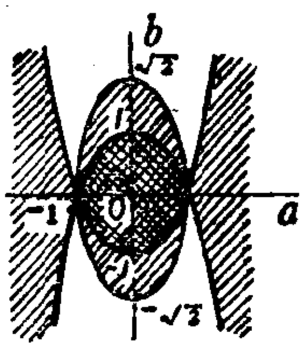
218．即要求 $a^2+2ab\cos\theta\sin\theta+b^2\sin^2\theta<1$ 对任意 θ 成立．此式可化作 $2ab\sin 2\theta-b^2\cos 2\theta<2-2a^2-b^2$．令

$$\cos\alpha=\frac{2ab}{\sqrt{4a^2b^2+b^4}},\qquad \sin\alpha=\frac{b^2}{\sqrt{4a^2b^2+b^4}}, \text{则}$$

$$\sin(2\theta-\alpha)<\frac{2-2a^2-b^2}{\sqrt{4a^2b^2+b^4}}. \qquad ①$$

①对任意 θ 成立的条件是 $\dfrac{2-2a^2-b^2}{\sqrt{4a^2b^2+b^4}}>1$，即 $2-2a^2-b^2>\sqrt{4a^2b^2+b^4}$．两端平方后化为

$$\begin{cases}2-2a^2-b^2>0, & ②\\ a^4-2a^2-b^2+1>0. & ③\end{cases}$$



218.

不等式③化为 $(a^2-b-1)(a^2+b-1)>0$，从而得 $1-a^2<b<a^2-1$ 或 $a^2-1<b<1-a^2$ 但前

者与②不符．所以得

$$1-a^2<b<a^2-1. \quad ④$$

满足④的点 (a,b) 的存在区域如上图双斜线部分所示，不包括边界．

219． Q 和 R 不能在过 P 直径的同侧，否则 $\triangle PQR$ 不能成为边长为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 的正三角形．现命 $\angle OPQ=\alpha$，$\angle OPR=\beta$，则

$\alpha+\beta=60^\circ$，从而 $OQ^2=\frac{7}{3}-\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\alpha$，$OR^2=\frac{7}{3}-\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\beta$．

两式相加并利用 $\alpha+\beta=60^\circ$ 化简得

$$S=OQ^2+OR^2=\frac{14}{3}-4\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ①$$

同时，为使 $OQ\leqslant1$，$OR\leqslant1$ 应有 $\cos\alpha\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$．

结合 $\alpha+\beta=60^\circ$，①中 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的最大值在 $\alpha=\beta=30^\circ$ 时达到．

此时 S 取最小值 $\frac{14}{3}-4=\frac{2}{3}$．

另一方面，为使 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 为最小，须使 $\frac{\alpha-\beta}{2}=30^\circ-\alpha$ 为最大．但已指出 $\cos\alpha$ 至少为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$，从而 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$．

此时 $\cos\beta=\cos(60^\circ-\alpha)=\cos60^\circ\sin\alpha+\sin60^\circ\cos\alpha$

$=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}>\frac{1}{\sqrt{3}}$．于是此时确使 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 为最小，其值

为 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos(\alpha-30^\circ)=\cos\alpha\cos30^\circ+\sin\alpha\sin30^\circ$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}$，所以$S$的最大值为

$$\frac{14}{3}-4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{2(4-\sqrt{6})}{3}.$$

220. 由正弦定理得 $\frac{b+c}{c}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin C}$，又由

$\sin C=\sin(A+B)$ 以及 $\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$ 结合题设得

$\sin(A-B)=\sin B+\sin(A+B)$，$\therefore\ \sin B(1+2\cos A)=0$.

所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$，即 $A=120°$.

221. 设AB，AC二边的中点各为D，E，二边的垂直平分线交点为F．按题意，区域G即四边形$ADEF$．而F为$\triangle ABC$的外心，设外接圆的半径为R，则 $\triangle AFD\cong\triangle BFD$，$\triangle AFE\cong\triangle CFE$．从而按题意

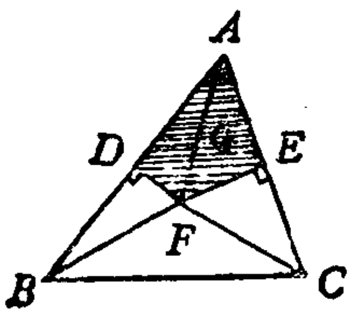
$\triangle BFC$的面积$=\triangle AFD$的面积$+\triangle AFE$的面积.

并且$\angle BFC=2\angle A=120°$，$\angle AFB=2\angle C$，$\angle AFC=2\angle B$．从而

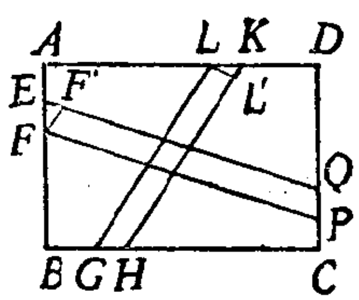
$$\frac{1}{2}R^2\sin 120°=\frac{1}{4}R^2\sin 2B+\frac{1}{4}R^2\sin 2C,$$

$$\therefore\ \sqrt{3}=\sin 2B+\sin 2C=2\sin(B+C)\cos(B-C).$$

按题意$B+C=120°$，于是得 $\cos(B-C)=1$，所以$B=C=60°$，$\triangle ABC$为正三角形.



221.



222.

222. (1) $AB=\frac{2}{3}a$，$EF=\frac{a}{100}$．在EQ、HK上分别取点

F', L' 使 $FF' \parallel GL$, $LL' \parallel EQ$, 令 $FF'=x$, $LL'=y$. 则 $\angle FF'E=\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta$, $\angle LL'K=\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta$, 在 $\triangle FF'E$ 中由正弦定理得

$x=\frac{a}{100}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$, 同理得 $y=\frac{a}{100}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$. 所以

$$S=\frac{2}{3}a^2-\frac{a^2}{100}-\frac{a}{100}\cdot\frac{2a}{3}+xy\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)$$

$$=\frac{13a^2}{20}+\frac{a^2}{10000}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)},$$

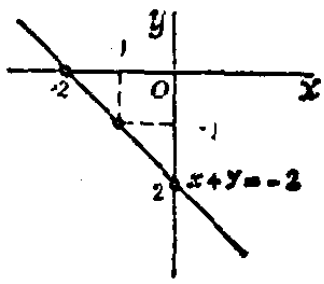
(2) 由题设与(1)的结果 $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}=1$, 从而 $\cos\alpha\cos\beta=0$. 于是 α, β 中至少要有一个为 $\frac{\pi}{2}$, 但从而另一个亦要为 $\frac{\pi}{2}$. 所以所求条件为 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$.

223. 直线 AB 的斜率为 -1, 所以 $y=x+6$.

224. (1) 置 $x+y=k$, ① 式成为

$\frac{k+2xy}{1+k+xy}=\frac{k}{1+k}$, 从而 $xy(k+2)=0$, 但 $xy\neq0$, 所以 $k=-2$.

(2) 图形如右图实线所示, 因为 $xy(1+x)(1+y)\neq0$, 所以尚须除去以 。表示的点.



224.

225. (1) -1; (2) 1; (3) $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$.

226. 将原式化为

$$y=\frac{-x\pm\sqrt{(1-4a)x^2+20x+4}}{2}.$$

要使它表示两直线，根号内的二次式须为完全平方，即 $10^2-4(1-4a)=0$，从而 $a=-6$. 因此两直线为 $y=2x+2$，$y=-3x-1$，夹角 $\theta=\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right|=\left|\operatorname{arc\,tg}(-1)\right|=\frac{\pi}{4}$.

227. $x=1$（参见上题）.

228. 把坐标轴平移到原点为 $P(1,0)$，则 $Q(0,1)$ 和 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 的坐标分别为 $(-1,1)$，$(\cos\theta-1,\sin\theta)$. 于是

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\left|1\cdot(\cos\theta-1)-(-1)\sin\theta\right|=\frac{1}{2}\left|\sin\theta+\cos\theta-1\right|.$$

229. 三直线的交点是 $A(2,3)$，$B(1,2)$，$C(3,1)$，从而参见上题得面积为 $\frac{3}{2}$，又设外接圆方程为 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，以三点代入解得 $a=-\frac{13}{3}$，$b=-\frac{11}{3}$，$c=\frac{20}{3}$.

230. (1) 设顶点 C 的坐标为 $C(x,y)$，则 $\frac{3+a+x}{3}=1$，$\frac{4+b+y}{3}=1$，从而解得 $x=-a$，$y=-1-b$.

(2) 据题设 $O(0,0)$ 是垂心，由 $AO\perp BC$ 得 $3a+4b=-2$，由 $BO\perp CA$ 得 $(b+5)b=-a^2-3a$. 消去并整理得 $(5a+6)(5a-6)=0$，由点 B 在第二象限得 $a=-\frac{6}{5}$，并且从而得 $b=\frac{2}{5}$.

231. (1) 点 A 的坐标应满足 $x=0$，$y=1$；点 B 的坐标应满足 $y=0$，$x=1$.

(2) 由 l_1 和 l_2 的方程联立得 $x_0=\frac{1-m}{1+m^2}$，$y_0=\frac{1+m}{1+m^2}$.

(3) 把坐标轴平移成原点在 B，则 A，P 的坐标分别为

$(-1,1)$, $\left(-\frac{m+m^2}{1+m^2}, \frac{1+m}{1+m^2}\right)$, 从而

$$S=\frac{1}{2}\left|-\frac{m+m^2}{1+m^2}+\frac{1+m}{1+m^2}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

后一步用到 $|m|\leqslant 1$.

(4) $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-(1+m^2)}{1+m^2}=\frac{1}{1+m^2}-\frac{1}{2}$. 从而当 $m=0$ 时 S 最大.

232. (1) 点P的坐标为 $P(h^2,h)$. 过P的斜率为k的直线 l 的方程为 $y-h=k(x-h^2)$. l 与 $y=\sqrt{x}$ 的交点的纵坐标决定于方程 $y-h=k(y^2-h^2)$ 的解.整理之,得 $ky^2-y+h-h^2k=0$. 要使 l 成为切线 l_1, 此方程应有重根: $1-4k(h-h^2k)=0$. 从而解得 $k=\frac{1}{2h}$, 所以 l_1 的方程为 $y-h=\frac{1}{2h}(x-h^2)$, 即

$$y=\frac{x}{2h}+\frac{h}{2}.$$

(2) 设 $y=h$ 上的点 $P(X,h)$关于 l_1 的对称点为 $Q(x,y)$, 则 P, Q 的中点在 l_1 上, 并且 $PQ\perp l_1$. 从而由 $\frac{y+h}{2}=\frac{1}{2h}\cdot\frac{x+X}{2}+\frac{h}{2}$, $2h(x-X)+y-h=0$ 消去X即得 l_2: $4hx+(1-4h^2)y-h=0$.

(3) l_2 对h 整理得 $4yh^2+(1-4x)h-y=0$. 它所通过的与 h 无关的点应满足 $4y=0$, $1-4x=0$, $-y=0$. 从而解得 $x=\frac{1}{4}$, $y=0$. 所求定点为$\left(\frac{1}{4},0\right)$.

233. 设O为原点, OA,OB 分别在 x 轴, y 轴上, 依条件, 各点坐标为 $A(2,0)$, $B(0,1)$, $P(2-t,0)$, $Q(0,1+t)$, 其中

$0<t<2$. 于是 AB, PQ 的方程分别为 $\frac{x}{2}+y=1$, $\frac{x}{2-t}+\frac{y}{1+t}=1$.

二方程的交点的横坐标是 $x=\frac{4-2t}{3}$, 当 $t\to0$ 时 $x\to\frac{4}{3}$. 所以M

接近于$\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$, 亦即线段 AB 的 1∶2 内分点.

234. 圆 $x^2-4x+y^2+1=0$ 的圆心为 $(2,0)$, 半径为$\sqrt{3}$. 由题意, 可设圆C的圆心为 $(0,c)$, 则其半径为 $\sqrt{c^2+1}$. 二圆的圆心距为 $\sqrt{c^2+4}$. 因此以二圆的任一交点、二圆的圆心为顶点构成一个以圆心距为斜边的直角三角形. 所以二圆交点上的半径互相垂直, 从而切线互相直交.

235. (1) 直线 AD 的方程为 $y=m(x-a)$, 代入 S 的方程, 得 $mx^2-max-1=0$. 设 B, C 的横坐标为 x_1, x_2, 由$x_1>x_2$ 从上述方程解得 $x_1=\frac{ma+\sqrt{m^2a^2+4m}}{2m}$, $x_2=\frac{ma-\sqrt{m^2a^2+4m}}{2m}$,

自 B, C 各向 x 轴作垂线, 设垂足分别为 B', C', 则

$B'A=a-x_1=\frac{ma-\sqrt{m^2a^2+4m}}{2m}=x_2=OC'$. 所以 $AB=CD$.

(2) 若 $AB=BC=CD$, 则 $C'B'=O'C'$, 即 $\frac{\sqrt{m^2a^2+4m}}{m}$

$=\frac{ma-\sqrt{m^2a^2+4m}}{2m}$, 解之得 $m=-\frac{9}{2a^2}$.

(3) 以 (2) 的结果代入, 得直线 AD 的方程为

$y=-\frac{9}{2a^2}x+\frac{9}{2a}$. 所以 $OD=\frac{9}{2a}$, $S_{\Delta OAD}=\frac{1}{2}OA\cdot OD=\frac{9}{4}$.

236. 一条直线不能与一条抛物线有多于两个的交点, 所以

所说两个函数的图象如果有四个交点，必然是左半平面与右半平面各两个．当 $x>0$ 时，从相交条件 $x=x^2+ax+b$ 推出 $x^2+(a-1)x+b=0$．它有两个相异正数解的条件是

$$b<\frac{(a-1)^2}{4},\quad a-1<0,\quad b>0. \qquad ①$$

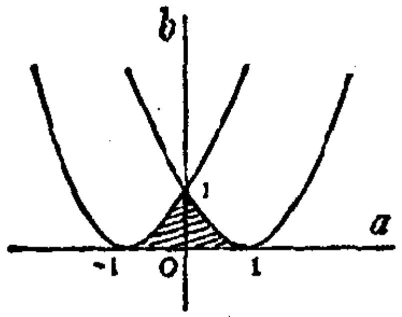
当 $x<0$ 时，从 $-x=x^2+ax+b$ 推出 $x^2+(a+1)x+b=0$，它有两个相异负数解的条件是

$$b<\frac{(a+1)^2}{4},\quad a+1>0,\quad b>0. \qquad ②$$

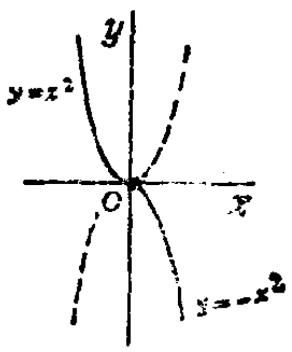
因此结合①，②所求条件是 $|a|<1$ 并且

$$b<\begin{cases}\frac{1}{4}(a-1)^2, & \text{当 } 0\leqslant a<1 \text{ 时；}\\ \frac{1}{4}(a+1)^2, & \text{当 } 0>a>-1 \text{ 时．}\end{cases}$$

满足此条件的点 (a,b) 的存在范围如左下图斜影部分所示，但不包括边界．



236．



237．

237． (1) L 的表示式即为

$$y=\begin{cases}-x^2, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时；}\\ x^2, & \text{当 } x<0 \text{ 时．}\end{cases}$$

其图象如右上．

(2) 设 P 的坐标为 $P(x,y)$．分三种情形讨论之：

i）$PA=AO$，这种情形仅需考虑 $x<0$ 部分的曲线．于是有 $x^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2=\left(\frac{3}{8}\right)^2$．以 $y=x^2$ 代入得 $y\left(y+\frac{1}{4}\right)=0$．因为 $y>0$，所以没有适合的点 P 存在．

ii）$PA=PO$，同样仅需考虑 $x<0$，于是 $y=\frac{3}{16}$，

$x=-\frac{\sqrt{3}}{4}$．

iii）$PO=AO$，于是 $x^2+y^2=\left(\frac{3}{8}\right)^2$．若 $x\geqslant 0$，则 $y=-x^2$，代入得 $y^2-y-\left(\frac{3}{8}\right)^2=0$，其负数解为 $y=-\frac{1}{8}$，从而$x=\frac{\sqrt{2}}{4}$；若 $x<0$，则 $y=x^2$，代入得 $y^2+y-\left(\frac{3}{8}\right)^2=0$，其正数解为 $y=\frac{1}{8}$，从而 $x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$．

总起来说，点 P 的所有可能的坐标为

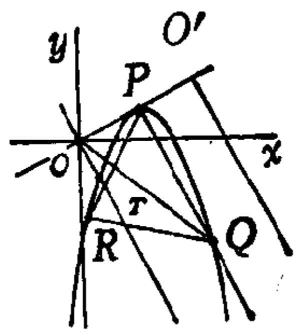
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{16}\right),\ \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\ \mp\frac{1}{8}\right).$$

238． (1) $y=mx$ 与 L 的方程联立得 $x^2+\left(m-\frac{9}{2}\right)x+4=0$．使它有重根的 m 值为 $\frac{17}{2}$，$\frac{1}{2}$．但 $m=\frac{17}{2}$ 时 x 为负的，与题设不符．$m=\frac{1}{2}$ 时 $x=2$，$y=1$．所以 $m=\frac{1}{2}$，切点为 $P(2,1)$．

(2) 通过 $P(2,1)$ 与切线 $y=\frac{x}{2}$ 垂直的直线方程为

$y=-2(x-2)+1$，即 $y=-2x+5$。与 L 的方程联立解得 $x=\frac{9}{2}$，$y=-4$。所以 Q 的坐标为 $Q\left(\frac{9}{2},-4\right)$。

(3) $\triangle OPQ$ 与 $\triangle RPQ$ 有公共的底边 PQ，而 OP 为前者的高，过 O 引底的平行直线 $y=-2x$，它与 L 交点的横坐标为 $x=\frac{13\pm\sqrt{105}}{4}$（见右图）。再于切线上找到 O 关于 $P(2,1)$ 的对称点 $O'(4,2)$，过 O' 引 PQ 的平行直线 $y=-2x+10$，它与 L 的方程联立无解，说明与 L 无交点．所以当 $\frac{13-\sqrt{105}}{4}\leqslant t\leqslant\frac{13+\sqrt{105}}{4}$ 时 $\triangle RPQ$ 的高不超过 $\triangle OPQ$ 的高 OP，当 $t>\frac{13+\sqrt{105}}{4}$ 或 $t<\frac{13-\sqrt{105}}{4}$ 时则反之．所以所求关于 t 的变化范围为 $t>\frac{13+\sqrt{105}}{4}$ 或 $t<\frac{13-\sqrt{105}}{4}$。



238.

239. (1) c' 与 c 的方程联立，得 $2x^2-2ax-b=0$．使 c' 与 c 有交点即要 $\frac{D}{4}=a^2+2b\geqslant0$．另外，$c$ 的顶点为 $(a,b+a^2)$，由于它在 l 上，有 $ma-(b+a^2)-2m+1=0$，解出 $b=ma-a^2-2m+1$ 代入上面的不等式，得

$$a^2-2ma+4m-2\leqslant0. \quad ①$$

满足此不等式的实数 a 存在的条件是 $\frac{D}{4}=m^2-(4m-2)\geqslant0$，从而解得 $m\leqslant2-\sqrt{2}$ 或 $m\geqslant2+\sqrt{2}$．这就是所求 m 的变化范围．

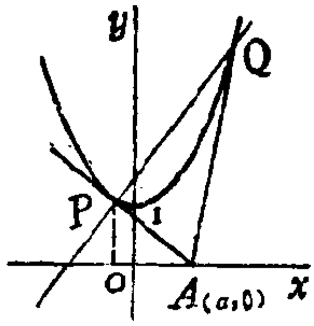
（2）当 $m=-1$ 时由①得 $a^2+2a-6\leqslant 0$，从而解得所求 a 的变化范围为 $-1-\sqrt{7}\leqslant a\leqslant -1+\sqrt{7}$．

240．（1）设切线方程为 $y=m(x-a)$，与抛物线方程联立得

$$x^2-mx+ma+1=0. \qquad ①$$

令判别式为 0 得

$$m^2-4am-4=0. \qquad ②$$



240.

②有两个解 m_1 与 m_2．又①与②消去 ma 得 $x^2-mx+\frac{m^2}{4}=0$，所以以 m_1 与 m_2 为斜率的两条切线的切点横坐标分别为 $\frac{m_1}{2}$ 与 $\frac{m_2}{2}$．因此，直线 PQ 的方程为

$$y=\frac{\left(\frac{m_2}{2}\right)^2+1-\left\{\left(\frac{m_1}{2}\right)^2+1\right\}}{\frac{m_2}{2}-\frac{m_1}{2}}\left(x-\frac{m_1}{2}\right)+\left(\frac{m_1}{2}\right)^2+1$$

$$=\frac{m_1+m_2}{2}\left(x-\frac{m_1}{2}\right)+\frac{m_1^2}{4}+1.$$

以 $m_1+m_2=4a$，$\frac{m_1^2}{4}-1=am_1$ 代入得 $y=2ax+2$．

（2）比较关于 a 的恒等式 $y=2xa+2$ 的对应项系数得 $y=2$，$2x=0$，又以 $(0,2)$ 代入直线 PQ 的方程 $y=2ax+2$ 的确满足，所以直线 PQ 必过定点 $(0,2)$．

241． 按题意，抛物线方程为 $y=f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$，$y=g(x)=b(x-\alpha)(x-\beta)$，且 $a\cdot b<0$．

当 F 与 G 分别是两抛物线的顶点时，由条件给出

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-y_0}{y_0-g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=k,$$

其中

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-\frac{a}{4}(\alpha-\beta)^2, \quad g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-\frac{b}{4}(\alpha-\beta)^2.$$

从而得

$$-\frac{a}{4}(\alpha-\beta)^2-\frac{kb}{4}(\alpha-\beta)^2=(k+1)y_0.$$

当F与点$(\alpha,0)$重合时，直线FP的方程是

$$y=-\frac{2y_0}{\alpha-\beta}(x-\alpha).$$

于是G的坐标可从 $b(x-\alpha)(x-\beta)=-\frac{2y_0}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$ 求得，因

$x\neq\alpha$ 故 $x=\beta-\frac{2y_0}{b(\alpha-\beta)}$. 再由条件给出

$$\frac{\beta-\frac{2y_0}{b(\alpha-\beta)}-\frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=k,$$

从而 $b=\frac{4ky_0}{(1-k)(\alpha-\beta)^2}$. 并且由此又得 $a=\frac{4y_0}{(k-1)(\alpha-\beta)^2}$.

所以，所求的

$$f(x)=\frac{4y_0}{(k-1)(\alpha-\beta)^2}(x-\alpha)(x-\beta),$$

$$g(x)=\frac{4ky_0}{(1-k)(\alpha-\beta)^2}(x-\alpha)(x-\beta).$$

242. 原式可化为 $x^2+y^2=1(x>0,\ y>0)$，其图形为中心在原点半径为1的圆在第一象限的那段圆弧，不包括两端点.

243. 答数依次为8，8，$4\sqrt{2}$，4，8，4，8，-4.

以 A，B 的坐标代入待定的圆方程 $x(x-a)+y(y-b)=0$，得解 $a=b=8$. 其方程可写成 $(x-4)^2+(y-4)^2=(4\sqrt{2})^2$. 又三角形的边长为 $8\sqrt{6}$，所以有两个顶点处在圆 $(x-8)^2+(y-8)^2=(4\sqrt{6})^2$ 与直线 $x+y=16$ 的交点上，解之得 $x=8\pm4\sqrt{3}, y=8\mp4\sqrt{3}$；另一个顶点在圆 $(x-8)^2+(y-8)^2=(4\sqrt{18})^2$ 与直线 $y=x$ 的那个在第三象限的交点处，解之得 $x=y=-4$.

244. (1) 由图 (a) 显然可见 Q 点的坐标 $Q(x,y)$ 为

$$x=a-ar^2+ar^4-\cdots,$$
$$y=ar-ar^3+ar^5-\cdots.$$

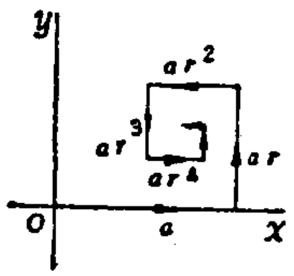
它们各自构成一个公比为 $-r^2$ 的无穷等比级数，因此其和为

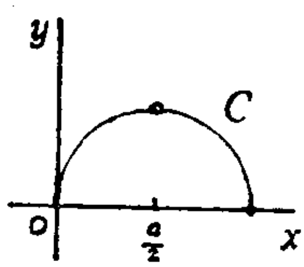
$$x=\frac{a}{1+r^2}, \qquad y=\frac{ar}{1+r^2} \quad (0<r<1). \qquad ①$$

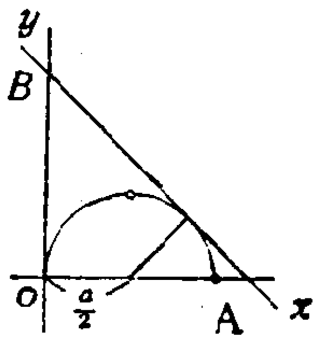
(2) 由上述结果消去 r：

$x^2+y^2=\left(\frac{a}{1+r^2}\right)^2+\left(\frac{ar}{1+r^2}\right)^2=\frac{a^2}{1+r^2}=ax$，可见当 $0<r<1$ 时 Q 的移动范围 C 在圆 $x^2+y^2=ax$ 上. 然而，由① $\frac{a}{2}<x<a$，$0<y<\frac{a}{2}$，所以 C 应为圆周的这一部分（见图(b)）：

$$C=\{(x,y): x^2+y^2=ax, \ \frac{a}{2}<x<a, \ y>0\}.$$







244. (a) (b) (c)

(3) 注意到 $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形，在图中的半圆与

$\triangle OAB$ 内接的情形，a 取得最大值，此时的半径 $\frac{a}{2}$ 须满足

$\left(\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{a}{2}\right)\sqrt{2}=1$. 因此 a 的最大值是 $\frac{2}{\sqrt{2}+1}=2(\sqrt{2}-1)$.

所以所求条件为 $0<a<2(\sqrt{2}-1)$.

245. 交点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的坐标应满足直线方程，从而 $y_2-y_1=2(x_2-x_1)$. 于是对 P_1P_2 之长 l 有

$l^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=5(x_2-x_1)^2=5(x_1+x_2)^2-20x_1x_2$.

从直线与圆的方程联立解得 $x_1+x_2=0$，$x_1x_2=-\frac{2}{5}$，所以 $l_2=8$，$l=2\sqrt{2}$.

246. 原曲线可化为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$，它是一个中心在 $A\left(\frac{1}{2},-1\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的圆. 设点 A 关于直线 $x-y+1=0$ 的对称点为 $B(p,q)$，则由于直线 AB 的斜率为 -1，从而 $p+q=-\frac{1}{2}$.

又线段 AB 的中点 $\left(\frac{p+\frac{1}{2}}{2},\ \frac{q-1}{2}\right)$ 应在直线 $x-y+1=0$ 上，从而 $p-q=-\frac{7}{2}$. 于是解得 $p=-2$，$q=\frac{3}{2}$. 所以所求曲线方程为 $(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

247. 根据圆心到切线的距离等于其半径，导得

$$\frac{|b|}{\sqrt{1+m^2}}=1,\qquad \frac{|4m+b|}{\sqrt{1+m^2}}=2.$$

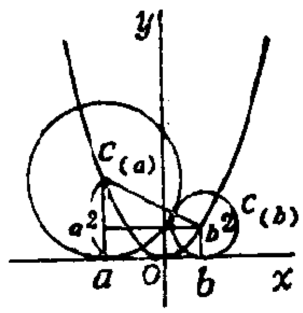
即 $b^2-m^2=1$，$16m^2+8bm+b^2=4m^2+1$. 从此二式消去 m^2，得 $3b^2-8bm+16m^2=0$. $\therefore (3b+4m)(b-4m)=0$. $\therefore b=-\frac{4}{3}m$，

$b=4m$. 从而相应得 $m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$， $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$.

248. (1) $C(a)$ 的半径为 a^2. 所以两圆 $C(a)$ 与 $C(b)$ 外切的条件是

$$\sqrt{(a-b)^2+(a^2-b^2)^2}=a^2+b^2,$$

即 $$(a-b)^2=4a^2b^2. \quad ①$$



248.

(2) 由①关于 b 整理得

$$(4a^2-1)b^2+2ab-a^2=0. \quad ②$$

当 $4a^2-1\neq0$ 时这是关于 b 的二次方程，因其判别式 $D=4a^2+4a^2(4a^2-1)=16a^4>0$，总有两个实数解，故所求 a 的值须满足 $4a^2-1=0$. 从而 $a=\pm\frac{1}{2}$.

(3) 对 $4a^2-1\neq0$，由②解得

$$b=\frac{-a\pm\sqrt{4a^4}}{4a^2-1}=\frac{a\mp2a^2}{1-4a^2}=\frac{a(1\mp2a)}{(1-2a)(1+2a)}=\frac{a}{1\pm2a}. \quad ③$$

(4) 以 $a_1=\frac{1}{2}$ 代入②，解得 $a_2=b=\frac{1}{4}$；又以 $a_2=\frac{1}{4}$ 代入③，得 $a_3=\frac{1}{6}$；同样得 $a_4=\frac{1}{8}$.

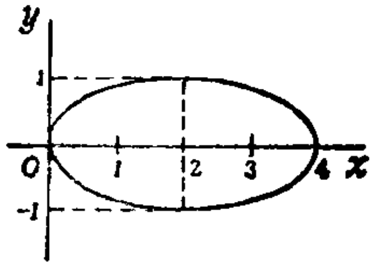
249. 设点 P 的坐标为 $P(x_1,y_1)$，则 OP 的斜率为 $\frac{y_1}{x_1}$ $(x_1\neq0)$，从而直线 AQ 的方程是

$$y=\frac{y_1}{x_1}(x+a). \quad ①$$

与椭圆方程联立解得 Q 的坐标为 $Q\left(\frac{2x_1^2-a^2}{a}, \frac{2x_1y_1}{a}\right)$. 又于①中令 $x=0$ 得 R 的坐标为 $R\left(0,\frac{ay_1}{x_1}\right)$. 从而

$$AQ=\frac{2}{a}\sqrt{x_1^2(x_1^2+y_1^2)},\qquad AR=a\sqrt{\frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2}}.$$

代入得 $\dfrac{AQ\cdot AR}{OP^2}=2$.



250.

250. (1) 原式化为$\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$，

其图形是右图所示的椭圆.

(2) 椭圆上的点(x,y)，满足$0\leqslant x\leqslant 4$，并且

$$z=x^2-y^2=x^2-\frac{4x-x^2}{4}=\frac{5}{4}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{1}{5}.$$

所以当 $x=\dfrac{2}{5}$ 时 z 取最小值 $-\dfrac{1}{5}$; 当 $x=4$ 时 z 取最大值 16.

251. 顶点 $P(x,y)$ 的坐标为 $x=a$, $y=-a^2+a$, 消去参数 a，得 $y=-x^2+x$. 此抛物线就是所求顶点的轨迹.

252. 以 $y=mx$ 代入圆的方程整理得

$$(m^2+1)x^2-2(a+2m)x+3=0, \qquad ①$$

相切条件是 $\dfrac{D}{4}=(a+2m)^2-3(m^2+1)=0$. 并且从而由①解得切点$(x,y)$的坐标 $x=\dfrac{a+2m}{m^2+1}$, 又 $y=mx=\dfrac{m(a+2m)}{m^2+1}$.

于是，$x^2+y^2=\dfrac{(a+2m)^2}{(m^2+1)^2}+\dfrac{m^2(a+2m)^2}{(m^2+1)^2}=\dfrac{(a+2m)^2}{m^2+1}$.

以相切条件代入得 $x^2+y^2=3$. 此圆就是所求切点的轨迹.

253. 代入得 $x^2+y^2+u^2+v^2=2(a^2+b^2)$.

又，由 $x-a=b\sin 2\theta$, $y=b\cos 2\theta$ 得 $(x-a)^2+y^2=b^2$, 并据 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\theta}{2}$ 得 x 的变化范围：当 $b>0$ 时 $a\leqslant x\leqslant a+b$; 当

$b<0$ 时 $a+b\leqslant x\leqslant a$.

254. 由题设 $P(x,y)$, $Q(X,Y)$ 满足

$$(x^2+y^2)(X^2+Y^2)=6^2,\quad \frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\alpha<0.$$

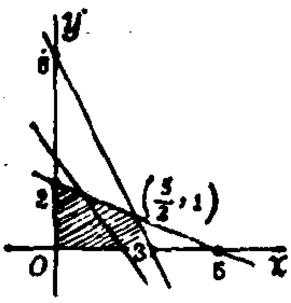
从而解出

$$x=-\frac{6X}{X^2+Y^2},\quad y=-\frac{6Y}{X^2+Y}.$$

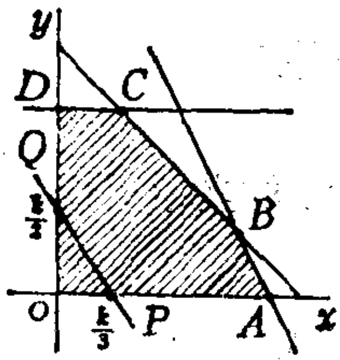
代入 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$，得 $\left(X+\frac{3}{2}\right)^2+(Y+1)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

255. 同时满足这些不等式的点 (x,y) 的存在区域如下左图斜线部分所示.

在此区域内，满足 $4x+3y=k$ 的点 (x,y) 形成一条线段. 线段的斜率介乎边界 $2x+5y=10$ 与 $2x+y=6$ 的斜率之间. 而此线段越向左上方推移则 k 的值越大. 所以 k 的最大值当在上述两边界的交点 $\left(\frac{5}{2},1\right)$ 达到：$k=4\times\frac{5}{2}+3\times1=13$. 所求的最大值是 $13-3=10$.



255.



256.

256. 同时满足这些不等式的点 (x,y) 是顶点在 $O(0,0)$, $A(3.5,0)$, $B(3,1)$, $C(1,3)$, $D(0,3)$ 的凸五边形，如上右图所示.

参见上题，$3x+2y$ 的最大值在 B 点达到，最大值为 11.

257. 两个圆的方程联立，解得交点为 $\left(\frac{a}{2},\pm\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}\right)$.

因此以公共弦为直径的圆，其圆心为$\left(\frac{a}{2},0\right)$，半径为$\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}$.

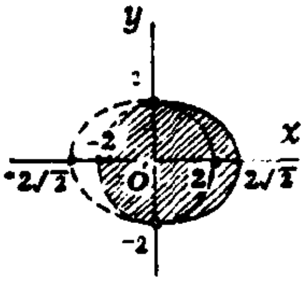
故此圆的方程是$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=4-\frac{a^2}{4}$，关于$a$整理得

$$a^2-2xa+2(x^2+y^2-4)=0.$$

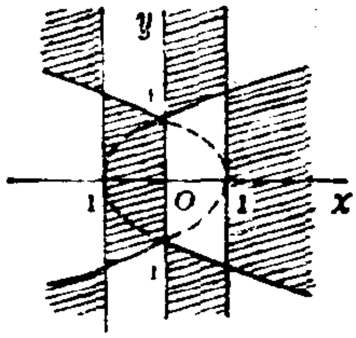
因a为实数，故$\frac{D}{4}=x^2-2(x^2+y^2-4)\geqslant0$，即

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\leqslant1.$$

此外，因$0<a<4$，当a很接近于0时，$C(a)$很接近于圆$x^2+y^2=4$；当a很接近于4时，$C(a)$很接近于点$(2,0)$．因此，$C(a)$的点如下左图的斜影部分所示，但当除去虚线以及点$(2,0)$，$(0,2)$，$(0,-2)$．



257.



258.

258. 设$x\geqslant0$，则$x^2-|x|y^2+y^2-1=x^2-xy^2+{}^2y-1$
$=(x+1)(x-1)-y^2(x-1)=(x-1)(x+1-y^2)$．所以由原式得$x(x-1)(x+1-y^2)\geqslant0$．即

$$\begin{cases}x\geqslant1,\\x+1-y^2\geqslant0.\end{cases}\quad\text{或者}\quad\begin{cases}0\leqslant x\leqslant1,\\x+1-y^2\leqslant0.\end{cases}\qquad①$$

设$x\leqslant0$，则$x^2-|x|y^2+y^2-1=x^2+xy^2+y^2-1=(x+1)\cdot(x-1)+y^2(x+1)=(x+1)(x-1+y^2)$．同样得

$$\begin{cases}0\geqslant x\geqslant -1,\\ x-1+y^2\leqslant 0.\end{cases}\quad \text{或者}\quad \begin{cases}x\leqslant -1,\\ x-1+y^2\geqslant 0.\end{cases} \qquad ②$$

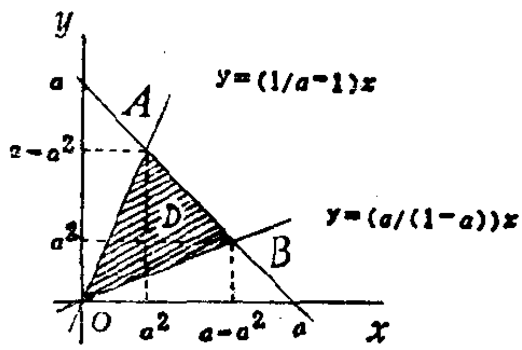
结合①和②，满足原不等式的点 (x,y) 的存在区域如上右图斜影部分所示，包括边界.

259. (1) 不等式①可写成

$$\begin{cases}x\geqslant a(x+y), & ②\\ y\geqslant a(x+y), & ③\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 & ④\end{cases}$$

由 ②+③ 得 $x+y\geqslant 2a(x+y)$，若①存在解 $(x,y)\neq(0,0)$，则 $x+y>0$，从而 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$. 反之，若 a 满足 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，则 $(x,y)=(1,1)$ 显然满足①. 所以所求 a 的范围为 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$.

(2) 直线 $x=a(x+y)$ 与 $x+y=a$ 的交点是 $A(a^2,a-a^2)$，直线 $y=a(x+y)$ 与 $x+y=a$ 的交点是 $B(a-a^2,a^2)$，所以以原点、A、B 为顶点的三角形 D 的面积为 $\frac{1}{2}a^2-a^3$（右图）.



259.

260. $a_{20}=-\frac{37}{6}$, $S_{20}=-\frac{265}{6}$.

261. 从 a 开始相继 $n(>1)$ 个自然数之和 $\frac{1}{2}n\ (2a+n-1)=63$，所以 n 应是 126 的约数 2，3，6，7，9，14，…. 但若 $n\geqslant 14$，则 $a\leqslant -2$，与题意不符. 此外相应求得 $a=31,20,8,6,3$. 所以所求表示法共 5 种：

$31+32$，$20+21+22$，$8+9+10+11+12$，

$6+7+8+9+10+11+12$，$3+4+5+6+7+8+9+10+11$.

262. (1) 由题设 $a_1+3d=a_1d^3$，$a_1+9d=a_1d^9$，解之得

$a_1=\dfrac{3d}{d^3-1}=\dfrac{9d}{d^9-1}$. 由 $d\neq0$ 得 $d^9-3d^3+2=0$.

$\therefore$ $(d^3-1)^2(d^3+2)=0$，由 $d\neq1$ 得 $d=-\sqrt[3]{2}$，并且从而 $a_1=\sqrt[3]{2}$.

(2) 设 $b_{16}=a_n$，则 $\sqrt[3]{2}(-\sqrt[3]{2})^{15}=\sqrt[3]{2}+(n-1)(-\sqrt[3]{2})$. 由是解得 $n=34$.

263. (1) 由题设 $a<b<a+b<ab<a+2b$. ①

从而 $(a+2b)-a>ab-b$，即 $2b>(a-1)b$. 由 $b>0$得 $2>a-1$，从而 $a=1$ 或 2. 但以 $a=1$ 代入①有 $b+1<b$ 之矛盾，以 $a=2$ 代入则其式对 $b>2$ 均成立. 所以 $a=2$.

(2) 从而 $a_m=2+(m-1)b$，$b_n=b\cdot2^{n-1}$，由题设得 $b\{2^{n-1}-(m-1)\}=3$. 可见 b 是 3 的约数. 但已知 $b>2$，所以 $b=3$，并且从而 $m=2^{n-1}$.

(3) 所求之和为

$$\sum_{n=1}^{k}a_{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{k}\{2+(2^{n-1}-1)\cdot3\}=2k+3\cdot\frac{2^k-1}{2-1}-3k$$

$$=3\cdot2^k-k-3.$$

264. (1) 凡属 $\{b_n\}$ 的项，以 3 除必余 2. 顺次写出 $\{a_n\}$ 的项，用这个原则去检查，属者底下加横线：

2，4，<u>8</u>，16，<u>32</u>，64，<u>128</u>，256，<u>512</u>，1024，<u>2048</u>，…

所以 $\{c_n\}$ 的开头五项为 8，32，128，512，2048.

(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 m 项与 $\{b_n\}$ 的第 k 项相等，并设这是 $\{c_n\}$ 的第 n 项：$c_n=2^m=3k+2$. $\{a_n\}$ 是递增的，它的第 $m+1$ 项为 $2^{m+1}=3(2k+1)+1$ 不是 $\{b_n\}$ 的项，而第 $m+2$ 项 $2^{m+2}=3(4k+2)+2$ 是 $\{b_n\}$ 的项，所以这就是 $\{c_n\}$ 的第 $n+1$ 项：$c_{n+1}=2^{m+2}$. 由此可见，$\{c_n\}$ 是以 4 为公比的等比数列.

265. $S_n=(1+a)\left\{1-\left(\frac{1}{1+a}\right)^n\right\}$, 适合$|S_n-(1+a)|$

$=\frac{1}{(1+a)^{n-1}}<\frac{1}{100}$ 的 n 由 $(n-1)\lg(1+a)>\lg 100$ 确定，为

$n>1+\frac{2}{\lg(1+a)}$.

266. (1) 当 $n\geqslant 2$ 时

$a_n=S_n-S_{n-1}=(1+ra_n)-(1+ra_{n-1})=ra_n-ra_{n-1}$,

即 $a_n=-\frac{r}{1-r}a_{n-1}$. 又由 $a_1=S_1=1+ra_1$ 得 $a_1=\frac{1}{1-r}$, 所以

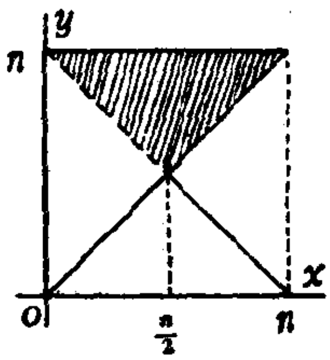
$a_n=(-1)^{n-1}\frac{r^{n-1}}{(1-r)^n}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{r}{1-r}\right)^n=0$, 即 $-1<\frac{r}{1-r}<1$.

即 $r<\frac{1}{2}$.

267. 三角形三边长为 $a, ar, ar^2(a>0, r>0)$. 它们应满足条件 $a+ar>r^2>|a-ar|$. 从而得 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

268. 设三边长为 n, x, y, 于是问题就是求同时满足 $x\leqslant y$, $x\leqslant n$, $y\leqslant n$, $x+y>n$ 的整数组 (x, y) 的个数. 如右图斜线部分（不包括虚线边界）所示. x 和 y 取整值的点的个数相同. 当 n 为偶数时，共有个数



268.

$$1+2+\cdots+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+\cdots+2+1=\frac{n(n+2)}{4}$$

当 n 为奇数时，共有个数

$$1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}+\cdots+2+1=\frac{(n+1)^2}{4}.$$

可以统一用$\left[\frac{1}{4}(n+1)^2\right]$表示，这里一个实数打上方括号表示不超过它的最大整数.

269. $a_k=\frac{2}{k(k+1)}+\frac{3}{(k+1)(k+2)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+3\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{7}{2}-\frac{2}{n+1}-\frac{3}{n+2}$.

270. 注意 $\frac{1}{\sqrt{\log_2 a_k}+\sqrt{\log_2 a_{k+1}}}=\frac{1}{\log_2 q}(\sqrt{\log_2 a_{k+1}}-\sqrt{\log_2 a_k})$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$.

271. 设首项为 a，公差为 d，由题设 $a>0$，$d\geqslant 0$. 又对 $a_k=a+(k-1)d$，$a_k^2=a^2+(k-1)\cdot 2ad+(k-1)^2d^2$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 作和得

$$S_n=na+\frac{1}{2}n(n-1)d,$$

$$T_n=na^2+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot 2ad+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)d^2.$$

代入题设整理得

$$(2-d)n^2+(2+d-2a)n-2\geqslant 0, \qquad ①$$

$$2(d^2-4)n^2+3d(2a-d)n+6a^2-6ad+d^2+2\geqslant 0. \qquad ②$$

当 n 充分大时可见 $2-d\geqslant 0$，$d^2-4\geqslant 0$，于是由 $d>0$ 得 $d=2$. 以此代入①，②得

$$(2-a)n-1\geqslant 0, \qquad ③$$

$$2(a-1)n+(a-1)^2\geqslant 0. \qquad ④$$

于③置 $n=1$ 得 $1-a\geqslant 0$，由④对充分大的 n 成立可见 $a-1\geqslant 0$. 所以 $a=1$. 反之，对 $a=1$，$d=2$ 检验题设皆符合.

272. 以 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$ 代入原式整理得

$$S_{n-1}-S_n=2S_nS_{n-1} \quad (n\geqslant 2).$$

显然任一 S_n 皆不为 0，以 S_nS_{n-1} 除上式两端得

$$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2 \quad (n\geqslant 2), \quad \frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1.$$

从而 $$\frac{1}{S_n}=1+2(n-1), \ S_n=\frac{1}{2n-1},$$

所以 $$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3} \quad (n\geqslant 2), \ a_1=1.$$

273. 根据题 93，对 $f(x)=2^x(x^2-4x+6)$，有 $f(x+1)-f(x)=2^xx^2$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}2^kk^2=f(n+1)-f(1)=2^{n+1}(n^2-2n+3)-6$.

又置 $g(x)=2^x(dx+e)$，使令满足 $g(x+1)-g(x)=2^xx$，与题93相仿解得 $d=1$，$e=-2$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}2^kk=g(n+1)-g(1)=2^{n+1}(n-1)+2$.

274. 在原数列中，凡分子与分母之和相等的项共入一组的话，它可分为

$$(1), \left(\frac{1}{2},\frac{2}{1}\right), \left(\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1}\right), \left(\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}\right), \cdots.$$

每组以第一个分数的分母作为该组的序号，而在同一组中，各分数的分母都依次减少 1，而分子相应增加 1，并且

分子＋分母＝组序号＋1.

所以 $\frac{8}{7}$ 属于第 $8+7-1=14$ 组，在该组中它是第 8 项，而到第 13 组末项为止共有 $1+2+3+\cdots+13=91$ 项，所以 $\frac{8}{7}$ 为第

$91+8=99$ 项.

又设第 800 项在第 n 组，则 $1+2+\cdots+(n-1)<800\leqslant 1+2+\cdots+n$，即 $n(n-1)<2\cdot 800=40^2\leqslant n(n+1)$，从而 $n=40$，而第 39 组末项的项序号是 780，因此第 800 项在第 40 组的第 20 项，它是 $\frac{20}{21}$.

275. (1) $f(2^{4n})=f(16^n)=6$.

(2) 若 $n=4m$，则 $a_n=f(2^{4m}\cdot 2-1)=f(6\cdot 2-1)=1$.

若 $n=4m+1$，则 $a_n=f(2^{4m}\cdot 4-1)=f(6\cdot 4-1)=3$.

若 $n=4m+2$，则 $a_n=f(2^{4m}\cdot 8-1)=f(6\cdot 8-1)=7$.

若 $n=4m+3$，则 $a_n=f(2^{4(m+1)}-1)=f(6-1)=5$.

276. (1) 由原式 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{a_n}=1+\frac{3}{a_n}$，所以

$$b_{n+1}=1+3b_n.$$

(2) 从而 $b_n=1+3b_{n-1}=1+3+3^2b_{n-2}=\cdots$

$$=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}b_1=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}-\frac{3^{n-1}}{2}$$

$$=\frac{3^n-1}{2}-\frac{3^{n-1}}{2}=\frac{2\cdot 3^{n-1}-1}{2}.$$

所以 $$a_n=\frac{2}{2\cdot 3^{n-1}-1}.$$

277. 以 $t_{m+2}=3t_m-t_{m+1}$ 代入直线方程，得

$$(x-3)t_m+(y+1)t_{m+1}=0.$$

当 $x=3$，$y=-1$ 时上式对任何自然数 m 均成立，所以所说的直线必通过定点 $(3,-1)$.

278. (1) 在下左图中，$OA=\frac{4}{3}$，$OB=1$，$\therefore\ AB=\frac{5}{3}$.

又 $KA : KH = AB : OB$,

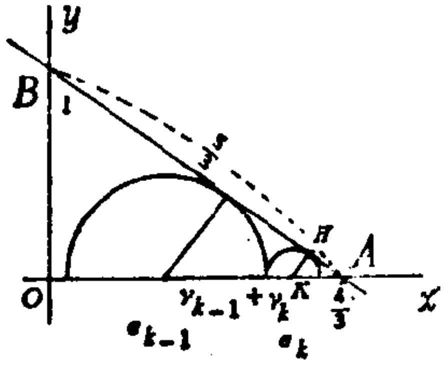
$$\therefore \left(\frac{4}{3}-a_k\right) : r_k = 5 : 3, \quad \therefore a_k = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} r_k.$$

(2) $r_k + r_{k-1} = a_k - a_{k-1} = \frac{5}{3} r_{k-1} - \frac{5}{3} r_k$, $\therefore r_k = \frac{1}{4} r_{k-1}$.

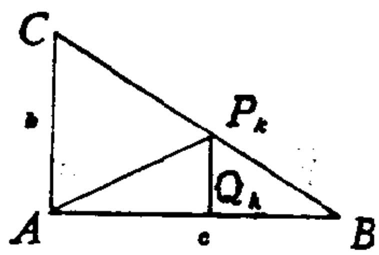
(3) $\because r_1 : \left(\frac{4}{3}-a_1\right) = 3 : 5$, $r_1 = -a_1$, $\therefore r_1 = 2$.

(4) 由 (2) $r_k = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} r_1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$，所以

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{2^2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k-2} = \frac{32}{15}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}.$$



278.



279.

279. (1) 如上右图，设 Q_k 为 P_k 到 AB 的垂线的垂足，则 $\triangle ABC \backsim \triangle Q_kBP_k$，从而

$$\frac{BQ_k}{AB} = \frac{P_kQ_k}{AC} = \frac{BP_k}{BC} = \frac{k}{n+1}, \quad \therefore P_kQ_k = \frac{kb}{n+1},$$

$$BQ_k = \frac{kc}{n+1}.$$

另一方面，由 $AQ_k = AB - BQ_k$ 得 $AQ_k = \frac{n+1-k}{n+1}c$. 于是在 $\triangle AP_kQ_k$ 中应用勾股定理得

$$AP_k^2=AQ_k^2+P_kQ_k^2=\frac{k^2b^2+(n+1-k)^2c^2}{(n+1)^2}.$$

(2) 从而 $S_n=\dfrac{1}{n(n+1)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\{k^2b^2+(n+1-k)^2c^2\}$

$$=\frac{2n+1}{6(n+1)}(b^2+c^2).$$

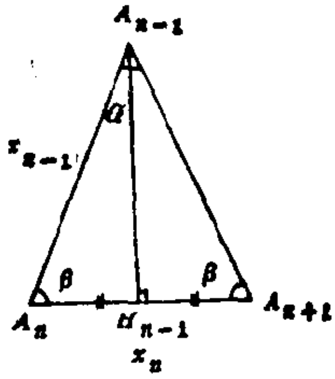
(3) 从而 $S_n=\dfrac{2n+1}{2(n+1)}$, $\therefore\ |S_n-1|=\dfrac{1}{2(n+1)}$.

280. (1) $\alpha+2\beta=\pi$.

(2) 对 $\triangle A_{n-1}A_nA_{n+1}$ 来说, $\angle A_{n+1}=\pi-(\alpha+\beta)=\beta$. $\therefore\ A_{n-1}A_n=A_{n-1}A_{n-1}$. 以 H_{n-1} 表由顶点 A_{n-1} 到底边 A_nA_{n+1} 的垂线的垂足, 则 $x_n=2A_nH_{n-1}=2x_{n-1}\cos\beta=(2\cos\beta)x_{n-1}$ $(n=2,3,4,\cdots)$, $\therefore\ x_n=(2\cos\beta)^{n-1}x_1$.

(3) 由 (2), $\triangle A_4A_5A_6\backsim\triangle A_1A_2A_3$, $A_4A_5=(2\cos\beta)^3A_1A_2$, $\therefore\ \triangle A_4A_5A_6$ 的面积 $=(2\cos\beta)^6$ ($\triangle A_1A_2A_3$ 的面积),

$\therefore\ (2\cos\beta)^6=\dfrac{1}{64}$, 而由 (1) 可知 $\dfrac{\pi}{3}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 从而 $0<\cos\beta<\dfrac{1}{2}$, 所以 $\cos\beta=\dfrac{1}{4}$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin\alpha=\sin(\pi-2\beta)=2\sin\beta\cos\beta=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.



280.

其次, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是首项为 x_1 公比为 $2\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ 的无穷等比数列, 因其公比的绝对值小于1, 所以收敛, 其和为 $2x_1$.

281. (1) 区域A如下左图斜线(左下—右上)所示. 在区域A中, 直线$x=k$ $(k=1,2,\cdots,n)$上的格子点$(k,1)$, $(k,2)$, $\cdots$, (k,k^2)共有k^2个, 所以

$$N(A)=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(2) 区域B如图中反手斜线(左上—右下)所示. 区域$A\cup B$是把A与B两块并起来, 即由直线$y=1$, $x=n$, $x=1$, $y=n^2$所围成的区域, 所以$N(A\cup B)=n^3$.

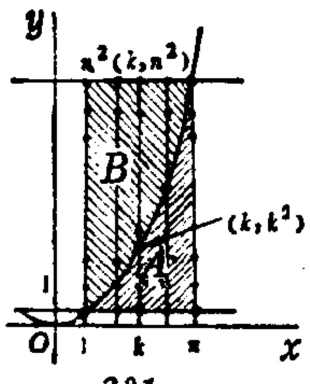
又$A\cap B$是曲线$y=x^2$上满足$1\leqslant x\leqslant n$的部分, 其中格子点是(k,k^2) $(k=1,2,\cdots,n)$, 所以$N(A\cup B)=n$.

(3) $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$,

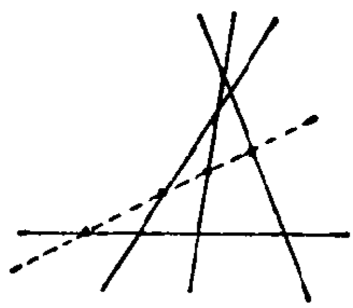
$$\therefore\ N(B)=N(A\cup B)-N(A)+N(A\cap B)=\frac{1}{6}(4n^3-3n^2+5n).$$

(4) $y=k$ $(k=1,2,\cdots,n^2)$和曲线$y=x^2$ $(x>0)$的交点横坐标为$x=\sqrt{k}$, 其整数部分$[\sqrt{k}]$就是区域B内在直线$y=k$上的格子点数, 所以

$$\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}]=N(B)=\frac{1}{6}(4n^3-3n^2+5n).$$



281.


282.

282. (1) 设k条直线把平面分割成a_k块. 当直线添加一条时, 此直线与它们有k个交点, 从而被分成$k+1$个线段或半直线. 每个线段或半直路均使块数增加一(见上右图), 它所画的是

$k=4$ 的情形)，所以 $a_{k+1}=a_k+(k+1)$，$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$ $=\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$，$a_n-a_1=\frac{1}{2}n(n+1)-1$．以 $a_1=2$ 代入，整理得 $a_n=\frac{1}{2}\cdot(n^2+n+2)$．

(2) p条平行直线把平面分成$p+1$块，当添加其余$n-p$条中的 r 条时，设将平面分割成 b_{p+r} 块．若再添加一条，则与(1)同样地 $b_{p+r+1}=b_{p+r}+(p+r+1)$，$\sum_{r=0}^{n-p-1}(b_{p+r+1}-b_{p+r})=\sum_{r=0}^{n-p-1}(p+r+1)$，$b_n-b_p=\frac{1}{2}(n+p+1)(n-p)$．以 $b_p=p+1$ 代入，得 $b_n=\frac{1}{2}\cdot(n^2-p^2+n+p+2)$．

(3) q 条相交于同一点的直线把平面分割成 $2q$ 块，当添加其余 $n-q$ 条中的 r 条时，设将平面分割成 c_{q+r}块．若再添加一条，则与(1)同样地 $c_{q+r+1}=c_{q+r}+(q+r+1)$，$c_n-c_q=\frac{1}{2}(n+q+1)\cdot(n-q)$．以 $c_{q+1}=2q$ 代入得 $c_n=\frac{1}{2}(n^2-q^2+n+3q)$．

283. (1) ∵ $\log_2 1=0$，$\log_2 2=1$．$1<\log_2 3<2$，$\log 4=2$，$2<\log_2 5<3$，∴ $F(1)=0$，$F(2)=1$，$F(3)=1$，$F(4)=2$，$F(5)=2$．

(2) ∵ $F(m)=n$，∴ $n\leqslant\log_2 m<n+1$，∴ $2^n\leqslant m<2^{n+1}$．满足此不等式的m共有 $2^{n+1}-2^n=2^n$ 个．

(3) 记 $S(k)=F(1)+F(2)+\cdots+F(2^k)$，$T(k)=(k-2)2^k+k+2$．当 $k=1$ 时，$S(1)=F(1)+F(2)=1$，$T(1)=1$，所以 $S(1)=T(1)$．

设当 $k=n\ (\geqslant 1)$ 时，有等式 $S(n)=T(n)$ 成立．今

$$S(n+1)=S(n)+F(2^n+1)+F(2^n+2)+\cdots+F(2^{n+1}-1)+F(2^{n+1}).$$

而 $$F(2^n+1)=F(2^n+2)=\cdots=F(2^{n+1}-1)=n,$$

其个数为$(2^{n+1}-1)-(2^n+1)+1=2^n-1$，并且 $F(2^{n+1})=n+1$，

所以 $$\begin{aligned}S(n+1)&=T(n)+n(2^n-1)+(n+1)\\&=(n-2)2^n+n+2+n(2^n-1)+(n+1)\\&=\{(n+1)-2\}2^{n+1}+(n+1)+2=T(n+1).\end{aligned}$$

这说明等式 $S(k)=T(k)$ 对 $n+1$ 也成立．因此这个等式，也即

$$F(1)+F(2)+\cdots+F(2^k)=(k-2)2^k+k+2$$

对所有自然数 k 都成立．

284． 设 k 为整数，对 a 分几种情形来讨论：

i) $a=4k$．此时 u_1 和 u_2 被 4 除都余 2，而

$$u_3=au_1-u_2=2a-(a^2+2)=4(2k-4k^2-1)+2$$

被 4 除也余 2．一般地，根据 $u_n=au_{n-1}-u_{n-2}(n\geqslant3)$ 利用数学归纳法可证，对任意自然数 n，u_n 被 4 除都余 2．因此这时 $\{u_n\}$ 中不出现 4 的倍数．

ii) $a=4k+1$．此时 u_2 被 4 除余 3，设 $u_2=4p+3$，则 $u_3=(4k+1)\cdot2-(4p+3)=4(2k-p-1)+3=4q+3$，这里 p,q 皆为整数，从而 $u_4=(4k+1)(4p+3)-(4q+3)=4(4kp+3k+p-q)$，是 4 的倍数．

iii) $a=4k+2$．此时与 i) 一样，可证 u_n 都不是 4 的倍数．

iv) $a=4k+3$．此时可设 $u_2=4p+3$，$u_3=4q+3$，并且从而 $u_4=(4k+3)(4p+3)-(4q+3)=4r+2$，$u_5=(4k+3)(4q+3)-(4r+2)=4s+3$，其中 p,q,r,s 皆为整数．一般地，若设 u_{3m-2}，u_{3m-1}，u_{3m} $(m\geqslant1)$ 被 4 除分别余 2，3，3，则同样可证 u_{3m+1}，u_{3m+2}，u_{3m+3} 被 4 除也分别余 2，3，3．所以此时 u_n 都不是 4 的倍数．

总起来说，当且仅当 $a\neq4k+1$（k 为整数）时 $\{u_n\}$ 的项中不出现 4 的倍数．

285. (1) $(1\pm\sqrt{2})^2=3\pm2\sqrt{2}$，$(1\pm\sqrt{2})^3=7\pm5\sqrt{2}$，据题设 $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$，我们推测 $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$.

(2) 当 $n=1$ 时，由 $1+\sqrt{2}=a_1+b_1\sqrt{2}$ 得 $a_1=b_1=1$，所以 $1-\sqrt{2}=a_1-b_1\sqrt{2}$ 成立.

设当 $n=k$ 时推测成立，即 $(1-\sqrt{2})^k=a_k-b_k\sqrt{2}$. 首先考察

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}&=(1+\sqrt{2})^{k+1}=(a_k+b_k\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\\
&=(a_k+2b_k)+(a_k+b_k)\sqrt{2},
\end{aligned}
$$

从而 $a_{k+1}=a_k+2b_k$，$b_{k+1}=a_k+b_k$. 所以

$$
\begin{aligned}
(1-\sqrt{2})^{k+1}&=(a_k-b_k\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=(a_k+2b_k)-(a_k+b_k)\sqrt{2}\\
&=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

即我们的推测对 $n=k+1$ 也成立. 所以，对任意自然数 n 都有

$$(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}.$$

(3) 上式与题设中的式子相加或相减，分别得

$$2a_n=(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n,$$

$$2\sqrt{2}\,b_n=(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n.$$

所以 $\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}$. 由于 $-1<\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}<0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

286. (1) $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{P_1^2-1}{2}=$有理数.

(2) 当 $n=1$ 时，由题设 P_1 是有理数.

当 $n=2$ 时，$P_2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 是有理数.

设对 $n=1,2,\cdots,k$ $(k\geqslant2)$，P_n 都是有理数，则对 $n=k+1$，

$P_{k+1}=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^k\theta+\cos^k\theta)-\sin\theta\cos\theta(\sin^{k-1}\theta+$

$\cos^{k-1}\theta)=P_1P_k+\sin\theta\cos\theta\, P_{k-1}$

也是有理数，所以 P_n 对任意自然数 n 都是有理数.

287. $y=f_1(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 取最大值1，在 $x=0,1$ 取最小值0．于是 $a_1=1$，$b_1=2$．并且 $x=0,1$ 对任意自然数 n 都是 $f_n(x)$ 的最小值点．于是 $f_n(x)$ 在 $0<x\leqslant1$ 的最大值点共 a_n 个，我们设 $f_n(x)$ 在 $0<x\leqslant1$ 的最小值点也是 a_n 个．则 $f_n(x)$ 在 $0\leqslant x<1$ 的最大值点数以及最小值点数也同是 a_n．今考察 $f_{n+1}(x)=f_n(f_1(x))=f_n(y)$，其中 $y=f_1(x)$．当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$0<y\leqslant1$ 单调增加，使 y 取 $f_n(y)$ 的 a_n 个最大值点、a_n 个最小值点的 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 也各是 a_n 个；当 $\frac{1}{2}<x\leqslant1$ 时，$0\leqslant y<1$ 单调减小，使 y 取 $f_n(y)$ 的 a_n 个最大值点、a_n 个最小值点的 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 也各是 a_n 个．所以 $f_{n+1}(x)$ 在 $0<x\leqslant1$ 的最大值点、最小值点各 $a_{n+1}=2a_n$ 个．据 $a_1=1$，用数学归纳法可证 $a_n=2^{n-1}$．并且从而 $b_n=a_n+1=2^{n-1}+1$.

288. 在 $n=1$ 的情形，设 $f(x)=ax+b$ 是任意一次式，假定 $f(0)=b$，$f(1)=a+b$ 都取整数值，那么 $a=f(1)-f(0)$ 和 b 均为整数，从而对任意整数 m，$f(m)$ 亦取整数值．命题成立.

假设命题对 $n-1$ 次多项式为真，并设对于 n 次多项式 $f(x)$ 来说，$f(0)$，$f(1)$，…，$f(n)$ 均取整数值．这时，$g(x)=f(x+1)-f(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式，对于它，

$g(0)=f(1)-f(0)$，$g(1)=f(2)-f(1)$，…，$g(n-1)=f(n)-f(n-1)$ 均取整数，于是由归纳法假设，对任意的整数 m，$g(m)$ 均取整数．从而

$$f(m)=g(m-1)+g(m-2)+\cdots+g(0)+f(0)=\text{整数}.$$

由此可见，命题对 n 次多项式成立.

289. (1) $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n^2$.

(2) $(a_1+a_2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)=\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}}+2=$
4.

(3) 当 $n=1$ 时，(1) 中的不等式成为 $a_1\cdot\frac{1}{a_1}\geqslant 1$，显然成立. 假设它对 $n=k$ 已成立，则

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{a_i}=\left(\sum_{i=1}^{k} a_i+a_{k+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_i}\right)+1$$

$$\geqslant k^2+\sum_{i=1}^{k} 2+1=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

所以(1)中不等式对 $n=k+1$ 也成立.

290. 不含 x^4 项，即 x^4 项系数为 0；x^{-4} 的系数为 $C_8^4=70$.

291. (1) 于二项式定理置 $x=1$.

(2) $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k=\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2n-k}=\sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k$.

(3) $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k=\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k+C_{2n}^n=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k+\sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k+C_{2n}^n\right\}$

$+\frac{1}{2}C_{2n}^n=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k+C_{2n}^n\right\}=2^{n-1}+\frac{1}{2}C_{2n}^n$.

292. (1) 当 $f(x)=1$ 时，$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$

$=\{x+(1-x)\}^n=1.$

(2) 当$f(x)=x$时，$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}$

$=x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=x.$

(3) 当 $f(x)=x^2$ 时，$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{k}{n}\right)^2x^k(1-x)^{n-k}$

$=x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}\cdot\frac{k}{n}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$，再将$k$拆成$(k-1)+1$，分开两个和同样处理得$f_n(x)=\frac{n-1}{n}x^2+\frac{1}{n}x.$

293. (1) n位数$S_n=111\cdots1=10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1=\frac{10^n-1}{9}$. 当$n=2k$时，$S_n=\frac{10^{2k}-1}{9}=\frac{100^k-1}{9}=\frac{100-1}{9}\cdot(100^{k-1}+\cdots+100+1)=11(100^{k-1}+\cdots+100+1)$ $(k=1,2,\cdots)$，总是11的倍数. 当$n=2k+1$ $(k=0,1,\cdots)$时，$S_n-1=\frac{10^{2k+1}-10}{9}=10\cdot\frac{10^{2k}-1}{9}$，已经指出对于$k=1,2,\cdots$这是11的倍数，对于$k=0$直接看出这是11的倍数，所以$S_n$本身不是11的倍数. 总起来说，所求的条件是$n=2k$ $(k=1,2,\cdots)$.

(2) $10^n=(1+9)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k9^{n-k}$. 又由杨辉恒等式$C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$容易发现

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^k9^{n-k}=1+10+\cdots+10^n,$$

并且可以用数学归纳法加以证明，因此 $T_n=S_{n+1}$，所以所求的条件是 $n=2k+1$ $(k=0,1,2,\cdots)$.

294. (1) $N=C_p^r=pC_{p-1}^{r-1}$. N 和 C_{p-1}^{r-1} 都是整数，且 r 是适合 $1\leqslant r\leqslant p-1$ 的整数，从而 r 和 p 互素，所以由 Nr 被 p 整除得出 N 被 p 整除.

(2) 固定 r，对 n 行归纳法. 当 $n=1$ 时，$n^p-1=0$ 是可以被 p 整除的. 设对 $n=k$，$n^p-n=k^p-k$ 能被 p 整除，则 $(k+1)^p-(k+1)=\sum\limits_{i=0}^{p}C_p^ik^{p-i}-(k+1)=k^p-k+C_p^1k^{p-1}+C_p^2k^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}k$. 由归纳法假设，$k^p-k$ 能被 p 整除，又由 (1) C_p^1, C_p^2, $\cdots$, C_p^{p-1} 都可被 p 整除，n^p-n 所以当 $n=k+1$ 时亦可被 p 整除.

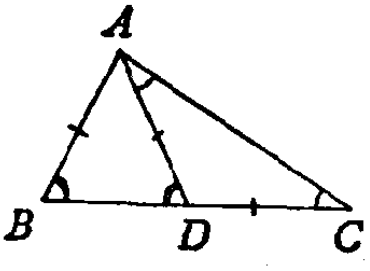
295. (1) 对于 $\angle ADC$ 之为直角、钝角与锐角，分别讨论之.

i) $\angle ADC=90°$. 此时 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 为等腰三角形的话，必有 $BD=AD=CD$. 从而 $\angle B=\angle C=45°$，$\angle A=90°$，所以 $\theta=45°$.

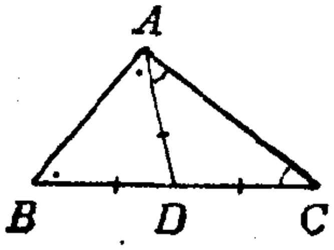
ii) $\angle ADC>90°$. 此时在等腰三角形 ACD 中，$AD=CD$；但在等腰三角形 ABD 中，尚可能有三种情形：

a) $AB=AD$. 此时 $\angle A>\angle DAC=\angle C$，$\angle B=\angle ADB=2\angle C$，所以 $\theta=\angle C$. 此时 $\angle A=180°-3\theta>\theta$，所以 $\theta<45°$.

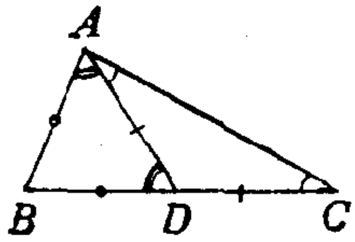
b) $BD=AD$. 此时 $\angle A=90°$，$\angle B+\angle C=90°$，从而 $2\theta\leqslant 90°$，所以 $\theta\leqslant 45°$.



295. (a)



(b)



(c)

c) $AB=BD$. 此时设$\angle C=\varphi$，则$\angle A=3\varphi$，$\angle B=180°-4\varphi$. 于是θ为$\angle B$与$\angle C$之小者. 但当$180°-4\varphi=\varphi$有时$\varphi=36°$，所以$\theta\leqslant 36°$.

iii) $\angle ADC<90$，此时$\angle ADB>90°$，情形与 ii) 相同.

综上所述，所求的范围为$0<\theta\leqslant 45°$.

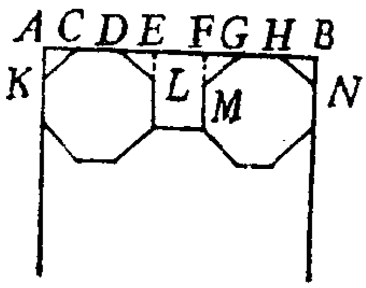
(2) 根据上半题 ii) 甲) 所述，$\angle C=\theta$，$\angle B=2\theta$，$\angle A=180°-3\theta$. 由正弦定理$AC=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{a\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$，所以

$$\triangle ABC\text{ 的面积}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\theta=\frac{a^2\sin\theta\cdot\sin 2\theta}{2\sin 3\theta}.$$

296. 正八边形的每个外角等于$360°\times\frac{1}{8}=45°$. 设其每边长为$a$. 如下图，$\triangle ACK$，$\triangle DEL$，$\triangle FGM$，$\triangle BHN$都是全等的直角等腰三角形，从而$AC=DE=FG=HB=\frac{a}{\sqrt{2}}$，并且$CD=EF=GH=a$. 由题设$AB=2$，从而

$$3a+\frac{4}{\sqrt{2}}a=2,$$

$$\therefore\ a=\frac{2}{3+2\sqrt{2}}=6-4\sqrt{2}.$$



296.

于是所求正八边形的面积

$S=AE\times AE-\triangle ACK$ 面积$\times 4=(a+\sqrt{2}a)^2-a^2=2(\sqrt{2}+1)a^2$
$=2(\sqrt{2}+1)(6-4\sqrt{2})^2=8(5\sqrt{2}-7)$.

297. (1) 设AB的中点为M，则

$$AP:AM=AQ:AC=AR:AE=2:3,$$

$\therefore$ 平面$PQR\parallel$平面MCE.

另一方面，正方形$BCDE$的中心O是CE，BD的中点，所以

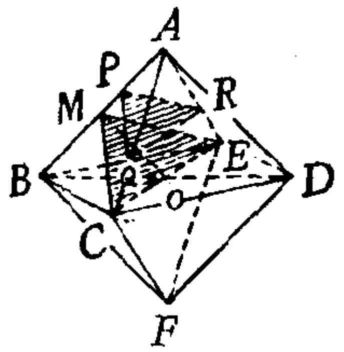
$$AD\parallel MO,\ MO\subset\triangle MCE,$$

$\therefore\quad AD \parallel$ 平面 MCE，　$\therefore\quad AD \parallel$ 平面 PQR.

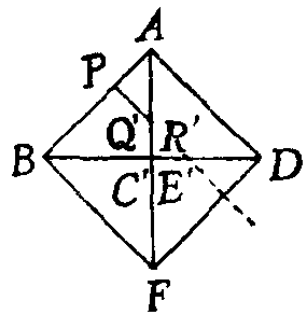
(2) 在 EC 方向的投影图 (图(b)) 中，$P'Q' \parallel A'D'$，$Q'=R'$，$C'=E'$. 从而直线 $P'Q'$ 与线段 $C'D'$，$E'D'$，$D'F'$ 相交，因此包含 B，Q，R 的平面与棱 CD，ED，FD 各有一个交点，顺次记之为 S，U，T，则截口即是六边形 $PQSTUR$. 见图 (c)

参见图 (d)，可得其各边长如下：

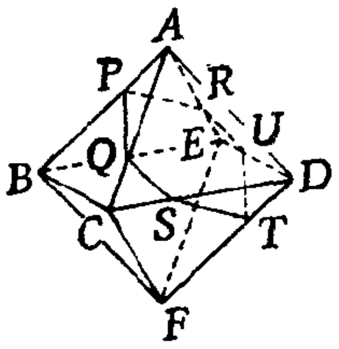
$$PQ=ST=TU=RP=2a\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\,a,\quad QS=UR=a.$$



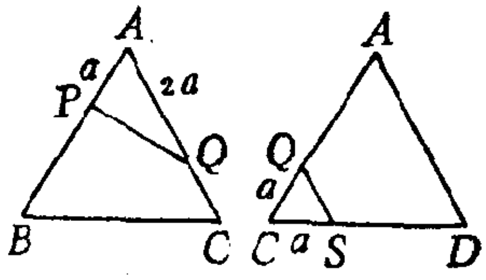
297.　(a)



(b)



(c)



(d)

298.　$BC=\sqrt{b^2+c^2}$，$A'M=\frac{1}{2}\sqrt{3(b^2+c^2)}$. 自 B' 向 $A'M$ 的延长线作垂线 $B'H$（请自作图）. M 是直角三角形 ABC 斜边 BC 的中点，从而 $MA=MC$. 再由 $B'A=B'C$，得 $B'M\perp AC$. 于是 $B'M \parallel AB$，$\triangle B'MH \backsim \triangle BCA$. 所以

$$B'M : B'H = BC : BA,$$

$$B'H=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{c}{2}\right)}{\sqrt{b^2+c^2}}c=\frac{c(\sqrt{3}b+c)}{2\sqrt{b^2+c^2}}.$$

因此 $\triangle MA'B'=\frac{1}{2}A'M\cdot BH'=\frac{1}{8}c(3b+\sqrt{3}c).$

299. $\triangle EDC$ 的底边，高分别是 $\triangle ABC$ 的底边，高的 $1-k$，k 倍，所以

$$\triangle EDC\text{ 的面积}=k(1-k)\cdot(\triangle ABC\text{ 的面积}).$$

对于 $\triangle EAF$，$\triangle DFB$ 也有同样情况，所以

$$\triangle DEF\text{ 的面积}=\{1-3k(1-k)\}\cdot(\triangle ABC\text{ 的面积}).$$

(1) 令 $k=\frac{1}{3}$，得 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $\frac{1}{3}$.

(2) 令 $1-3k(1-k)=\frac{1}{2}$，解得 $k=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$.

300. (1) 因为 $14(-5)+36\cdot2=2$，所以 $2\in S$.

(2) 设 $x\in S$，则 $x=14m+36n=2(7m+18n)$，所以 x 是偶数. 反之，对任一偶数 $y=2l$（l 是整数），由 (1) 可以把它写成 $y=2l=14(-5l)+36(2l)$，这里 $-5l$ 和 $2l$ 显然都是整数，所以 $y\in S$. 因此 S 与全体偶数之集相等.

301. 由 $\begin{cases}|x-a|<a+\frac{1}{2},\\ |x|<2a\end{cases}$ 联立，即

$$\begin{cases}-a-\frac{1}{2}<x-a<a+\frac{1}{2},\\ -2a<x<2a\end{cases}$$

联立，解得 $-\frac{1}{2}<x<2a$，所以 $M\cap N=\{0,1,2,\cdots,2a-1\}$. 属于它的各数之和为 $a(2a-1)$.

302. 由$\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1\end{cases}$解得 $A\cap C=\left\{(1,0),\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)\right\}$,

由$\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1\end{cases}$解得 $B\cap C=\left\{(0,1),\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right\}$. 所以

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$=\left\{(0,1),\ (1,0),\ \left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right),\ \left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)\right\}.$$

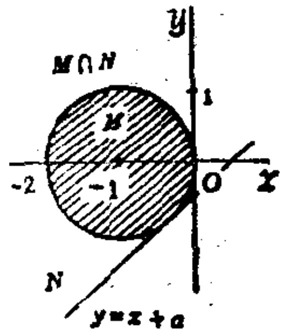
当 $\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)=(0,1)$ 从而并且 $\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)=(1,0)$

时,或者当 $\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)=(1,0)$ 从而并且 $\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)$

$=(0,1)$ 时 $(A\cup B)\cap C$ 的元素为两个, 此时 $a=0$ 或 1. 又当 $2a=1-a^2$ 时 $(A\cup B)\cap C$ 的元素为三个,此时 $a=-1+\sqrt{2}$ 或 $-1-\sqrt{2}$.

303. 当且仅当 $M\subset N$ 时 $M\cap N=M$. 使圆 $(x+1)^2+y^2=1$ 与直线 $y=x+a$ 相切的 a 值为 $1\pm\sqrt{2}$. 因此从图上看出使 $M\subset N$, 即使 $M\cap N=M$ 的 a 值的范围是

$$a\leqslant 1-\sqrt{2}.$$



303.

304. (1) 为了证明 F 是一一对应, 只要证明由 $F(a,b)=F(c,d)$ 可以推出 $(a,b)=(c,d)$ 即可.

$F(a,b)=F(c,d)$ 表示对任意 x, 都有 $a\cos x+b\sin x=c\cos x+d\sin x$. 从而 $(a-c)\cos x=(d-b)\sin x$, 或者化为 $\{(a-c)^2+(d-b)^2\}\cos^2x-(d-b)^2=0$. 此式对任意 x 都成立, 所以 $(a-c)^2+(d-b)^2=0$, 并且 $(d-b)^2=0$. 从而得 $d=b$,

$a=c$.

(2) 由 $f_0(x)\in X$ 得知存在常数 a_0 与 b_0 使 $f_0(x)=a_0\cos x+b_0\sin x$. 于是 $f_t(x)=f_0(x+t)=a_0\cos(x+t)+b_0\sin(x+t)=(a_0\cos t+b_0\sin t)\cos x+(b_0\cos t-a_0\sin t)\sin x$. 因为 $a_0\cos t+b_0\sin t=A$ 以及 $b_0\cos t-a_0\sin t=B$ 都是常数，所以 $f_t(x)\in X$.

(3) 设 $f_0(x)=a_0\cos x+b_0\sin x$，现对 $X_1=\{f_0(x+t): t$ 为实数$\}$，求 $F^{-1}(X_1)=\{(a,b): F(a,b)\in X_1\}$.

任取 $F(a,b)=f_0(x+t)\in X_1$，由 (2) $f_0(x+t)=(a_0\cos t+b_0\sin t)\cos x+(b_0\cos t-a_0\sin t)\sin x$，所以

$$a=a_0\cos t+b_0\sin t,\quad b=b_0\cos t-a_0\sin t.$$

两式平方后相加，得 $a^2+b^2=a_0^2+b_0^2$,所以 X_1 的原象

$$F^{-1}(X_1)=\{(a,b): a^2+b^2=a_0^2+b_0^2\}.$$

这是中心在原点半径为 $\sqrt{a_0^2+b_0^2}$ 的圆（图略）.

305. 由定义，$C\succ B$ 的否定表示存在 C 中的元素 c 和 B 中的元素 b，使 c 不大于 b，即 $b\geqslant c$. 又，$A\succ B$ 表示 A 的任何元素都大于 B 的任何元素，今设 a 是 A 中的任何元素，由于 $b\in B$，所以有 $a>b$. 同样地，设 d 是 D 中的任何元素，则 $c>d$. 所以 $a>b\geqslant c>d$，即 $a>d$. 因为 a，b 分别是 A 和 D 中的任何元素，所以由定义得 $A\succ D$.

306. (1) 设对任何 (x,y) 都有 $(x,y)*(x',y')=(x,y)$. 由运算的定义，$(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)$，于是对任何 (x,y) 都有 $(xx',xy'+x'y)=(x,y)$. 即

$$xx'=x, \quad ① \qquad xy'+x'y=y \quad ②$$

对任何实数 x,y 成立. 由①得 $x'=1$，代入②得 $xy'=0$ 对任意实数 x 成立，从而 $y'=0$. 所以所求 $(x',y')=(1,0)$.

(2) 设 $x\neq 0$，并且 $(x,y)*(x',y')=(1,0)$. 则

$$xx'=1, \qquad ③ \qquad xy'+x'y=0. \qquad ④$$

由③得 $x'=\frac{1}{x}$，代入④得 $y'=-\frac{y}{x^2}$，所以所求

$$(x',y')=\left(\frac{1}{x},\ -\frac{y}{x^2}\right).$$

307. (1) 如果甲说的是错话，则甲不是 A 型，而乙是 O 型，丙是 AB 型，所以甲必为 B 型，丁必为 A 型，这与丁说的"我不是 AB 型"没有矛盾.

(2) 实质上与 (1) 同样，没有矛盾.

(3) 如果丙说的是错话，则丙不是 AB 型，而甲是 A 型，乙是 O 型，从而丙当是 B 型，丁当是 AB 型，这与丁的话不符，所以说错话的不止一人，这表明这个判断与已知事实矛盾.

(4) 如果丁说的是错话，则丁是 AB 型，于是丙不是 AB 型，这与丙的话不符，矛盾.

附　　录

〔1〕北海道大学
〔2〕室兰工业大学
〔3〕秋田大学
〔4〕岩手大学
〔5〕东北大学
〔6〕山形大学
〔7〕茨城大学
〔8〕宇都宫大学
〔9〕群马大学
〔10〕埼玉大学
〔11〕筑波大学
〔12〕千叶大学
〔13〕お茶の水女子大学
〔14〕电气通信大学
〔15〕东京大学
〔16〕东京医科齿科大学
〔17〕东京学艺大学
〔18〕东京工业大学
〔19〕东京商船大学
〔20〕东京水产大学
〔21〕东京农工大学
〔22〕一桥大学
〔23〕横浜国立大学
〔24〕新泻大学
〔25〕信州大学
〔26〕山梨大学
〔27〕富山大学
〔28〕富山医科药科大学
〔29〕金沢大学
〔30〕福井大学
〔31〕静冈大学
〔32〕浜松医科大学
〔33〕名古屋大学
〔34〕名古屋工业大学
〔35〕三重大学
〔36〕岐阜大学
〔37〕滋贺医科大学
〔38〕京都大学
〔39〕京都工艺纤维大学
〔40〕大阪大学
〔41〕神户大学
〔42〕奈良女子大学
〔43〕冈山大学
〔44〕广岛大学
〔45〕鸟取大学
〔46〕岛根医科大学
〔47〕山口大学
〔48〕爱媛大学
〔49〕德岛大学
〔50〕高知大学
〔51〕高知医科大学
〔52〕九州大学
〔53〕九州艺术工科大学
〔54〕九州工业大学
〔55〕佐贺大学
〔56〕长崎大学
〔57〕熊本大学
〔58〕大分大学

〔59〕 大分医科大学
〔60〕 宫崎大学
〔61〕 宫崎医科大学
〔62〕 鹿儿岛大学
〔63〕 琉球大学
〔64〕 札幌医科大学
〔65〕 东京都立大学
〔66〕 横浜市立大学
〔67〕 名古屋市立大学
〔68〕 京都府立医科大学
〔69〕 大阪市立大学
〔70〕 大阪府立大学
〔71〕 和歌山县立医科大学
〔72〕 防卫大学校
〔73〕 防卫医科大学校
〔74〕 足利工业大学
〔75〕 自治医科大学
〔76〕 青山学院大学(理工学部)
〔77〕 学习院大学(理学部)
〔78〕 庆应义塾 大 学(工·医·经济学部)
〔79〕 工学院大学(电气工·电子工学科)
〔80〕 芝浦工业大学(建筑工·机械工学科)
〔81〕 上智大学(理工学部)
〔82〕 成蹊大学(工学部)
〔83〕 玉川大学(工学部)
〔84〕 中央大学(理工学部)
〔85〕 津田塾大学(学艺学院)
〔86〕 东海大学(工学部)
〔87〕 东京电机大学(工学部)
〔88〕 东京理科大学(工学部)
〔89〕 东洋大学(工学部)
〔90〕 日本大学(理工·工学部)
〔91〕 日本医科大学
〔92〕 法政大学(工学部)
〔93〕 武藏工业大学(机械工·建筑学科)
〔94〕 明治大学(工学部)
〔95〕 明星大学(理工学部)
〔96〕 立教大学(理学部)
〔97〕 早稻田大学(理工·政治经济学部)
〔98〕 几德工业大学
〔99〕 神奈川大学(工学部)
〔100〕 关东学院大学(工学部)
〔101〕 同志社大学(工学部)
〔102〕 立命馆大学(理工学部)
〔103〕 大阪工业大学
〔104〕 关西大学(工学部)
〔105〕 近畿大学(理工学部)
〔106〕 关西学院大学(理学部)
〔107〕 旭川医科大学
〔108〕 小樽商科大学
〔109〕 带广畜产大学
〔110〕 北见工业大学
〔111〕 北海道教育大学
〔112〕 弘前大学(教育·理·农·医学部)
〔113〕 秋田大学(教育学部-数)
〔114〕 福岛大学(教育·经济学部)
〔115〕 东京艺术大学(美术学部-建筑)
〔116〕 长冈技术科学大学
〔117〕 信州大学(工学部/教育学

部-数专)
〔118〕爱知教育大学(理·数专)
〔119〕丰桥技术科学大学
〔120〕滋贺大学(经济·教育学部)
〔121〕京都教育大学
〔122〕大阪教育大学(数专)
〔123〕神户商船大学
〔124〕奈良教育大学(数专)
〔125〕和歌山大学
〔126〕岛根大学(农·理学部)
〔127〕山口大学(教育·经济学部)
〔128〕香川大学
〔129〕爱媛大学(理学部·数)
〔130〕福冈教育大学(数专/理·技术专)
〔131〕鹿儿岛大学(理学部-数·地/农水产学部)
〔132〕福岛县立医科大学
〔133〕东京都立大学(文系)
〔134〕岐阜药科大学
〔135〕大阪女子大学(学艺学部-基础理)
〔136〕大阪府立大学(农·经济·综合科学部)
〔137〕神户商科大学(管理科学科/经济·经营学科
〔138〕姬路工业大学
〔139〕奈良县立医科大学
〔140〕下关市立大学
〔141〕北九州大学(商学部)
〔142〕九州齿科大学
〔143〕福冈女子大学
〔144〕熊本女子大学(文·家政学部-家政)
〔145〕北海道工业大学
〔146〕北海道药科大学
〔147〕岩手医科大学(医学部/齿学部)
〔148〕东北学院大学(工学部)
〔149〕东北工业大学
〔150〕独协医科大学
〔151〕城西大学(理学部)
〔152〕千叶工业大学
〔153〕青山学院大学(经济学部)
〔154〕学习院大学(经济学部)
〔155〕杏林大学
〔156〕庆应义塾大学(法学部/商学部)
〔157〕工学院大学(建筑学科)
〔158〕芝浦工业大学(金属工·电子工·工业经营学科)
〔159〕顺天堂大学(医学部)
〔160〕上智大学(经济学部)
〔161〕昭和大学(医学部/法学部)
〔162〕成蹊大学(法学部)
〔163〕成城大学(经济学部)
〔164〕专修大学(经济学部)
〔165〕创价大学(经济学部)
〔166〕玉川大学(工学部-情报通信·经营工学科)
〔167〕中央大学(经济学部/商学部/法学部)
〔168〕津田塾大学(学艺学部)
〔169〕东海大学(理学部/医学部)

〔170〕东京医科大学
〔171〕东京慈惠会医科大学
〔172〕东京女子大学（文理学部-数理）
〔173〕东京女子医科大学
〔174〕东京电机大学(工学部-建筑·电气通信工)
〔175〕东京农业大学(农学部-农业工)
〔176〕东京药科大学
〔177〕东京理科大学(药学部/理学部/理工学部)
〔178〕东邦大学(药学部/理学部/医学部)
〔179〕日本大学(医学部/生产工学部/农兽医学部/齿学部/松户齿学部)
〔180〕日本齿科大学
〔181〕日本兽医畜产大学(兽医学科/畜产·畜产食品工学科)
〔182〕日本女子大学(家政学部)
〔183〕法政大学(经济学部/经营学部)
〔184〕星药科大学
〔185〕武藏工业大学
〔186〕明治大学(商学部/经营学部)
〔187〕明治药科大学
〔188〕立教大学(法学部/社会学部)
〔189〕早稻田大学(商学部/社会科学部/第一文学部/教育学部-理)
〔190〕相模工业大学
〔191〕圣マリアンナ医科大学
〔192〕鹤见大学(齿学部)
〔193〕东京工艺大学(工学部)
〔194〕新泻药科大学
〔195〕金沢医科大学
〔196〕爱知学院大学(齿学部)
〔197〕爱知工业大学
〔198〕南山大学(经济学部)
〔199〕名城大学(理工学部)
〔200〕京都产业大学(理学部)
〔201〕同志社大学(商学部/经济学部)
〔202〕立命馆大学(产业社会学部/经营学部)
〔203〕大阪齿科大学
〔204〕大阪电气通信大学
〔205〕大阪药科大学
〔206〕关西大学(经济学部/商学部)
〔207〕关西医科大学
〔208〕近畿大学(药学部/医学部)
〔209〕关西学院大学(经济学部/商学部)
〔210〕甲南大学(理学部)
〔211〕神户学院大学(药学部)
〔212〕神户女子药科大学
〔213〕兵库医科大学
〔214〕天理大学
〔215〕武库川女子大学(药学部)

〔216〕冈山理科大学
〔217〕川崎医科大学
〔218〕广岛工业大学
〔219〕德岛文理大学(药学部)
〔220〕松山商科大学（经济学部）
〔221〕九州产业大学(工学部)
〔222〕久留米大学(医学部)
〔223〕产业医科大学
〔224〕第一药科大学
〔225〕西日本工业大学
〔226〕福冈大学(理·工学部/医·药·工学部)
〔227〕福冈工业大学
〔228〕长崎综合科学大学
〔229〕大分工业大学
〔230〕熊本工业大学